COMPORTĂRI ASIMPTOTICE ALE ECUAŢIILOR LINIARE STOCASTICE ÎN SPAŢII HILBERT

Viorica Mariela Ungureanu

Cuprins

1. Introducere

Această lucrare tratează intr-un mod sistematic probleme legate de stabilitate, observabilitate, existenţa unei soluţii stabilizante a ecuaţiei Riccati asociată problemei controlului liniar pătratic şi probleme de dihotomie atât pentru sisteme de ecuaţii liniare discrete stocastice cât şi pentru ecuaţii diferenţiale liniare stocastice, considerate in spaţii Hilbert, separabile, infinit dimensionale.

Conceptele de controlabilitate şi observabilitate uniformă (in cazul coeficienţilor constanţi, acestea sunt cunoscute sub denumirea de controlabilitate şi observabilitate completă) au fost introduse pentru prima dată de R.Kalman (1960) pentru sisteme deterministe de comandă şi spaţii finit dimensionale.

Aceste concepte au fost frecvent folosite in aproape toate lucrările care tratează probleme de teoria sistemelor liniare de comandă. Aici pot fi menţionate lucrările [**56**], [**15**], [**32**], pentru cazul finit dimensional şi lucrarea [**3**] pentru cazul infinit dimensional.

În cazul stocastic, conceptul de observabilitate (in sensul adoptat in această lucrare) a sistemelor liniare discrete cu coeficienţi constanţi, considerate in spaţii Hilbert infinit dimensionale, a fost introdus de J. Zabczyk (1974) in [**76**] şi a fost folosit in studiul problemei controlului liniar pătratic.

Pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale stocastice liniare, respectiv discrete, cu coeficienţi variabili, conceptul de observabilitate stocastică uniformă a fost introdus de T. Morozan (1992,1993) in [**48**] şi [**50**]. Lucrările [**76**], [**48**] şi [**50**] au constituit punctul de plecare in elaborarea acestei lucrari.

Astfel, in primul capitol al lucrării de faţă sunt prezentate câteva noţiuni fundamentale legate de operatorii nucleari şi Hilbert - Schmidt şi noţiuni introductive privind variabile aleatoare, procese stocastice in spaţii Hilbert şi integrala stocastică. Tot in acest capitol sunt introduse cele două tipuri de ecuaţii studiate şi sunt prezentate anumite proprietăţi ale soluţiilor acestora, proprietăţi ce vor fi necesare in capitolele care urmează. Lucrările [**1**], [**23**], [**21**], [**12**], [**10**], [**55**], [**9**], [**11**], [**77**], [**76**], [**52**], [**24**] au fost foarte utile in elaborarea acestui capitol.

Capitolul al doilea consideră ecuaţii liniare discrete perturbate cu variabile aleatoare independente. Coeficienţii acestor ecuaţii sunt operatori liniari şi mărginiţi, dependenţi de timp, care acţionează pe spaţii Hilbert infinit dimensionale.

În primul rând este tratată problema stabilităţii exponenţiale şi problema stabilităţii exponenţiale uniforme a sistemelor precizate mai sus. Probleme asemănătoare au fost considerate anterior in lucrările [**25**], [**53**], [**49**] (in [**49**] se lucrează cu sisteme cu perturbaţii Markov), in cazul spaţiilor finit dimensionale, iar in cazul infinit dimensional avem lucrările lui Zabczyk [**77**], [**76**], pentru sisteme cu coeficienţi constanţi.

Pentru a obţine caracterizări deterministe ale stabilităţii exponenţiale (uniforme sau nu) pentru sisteme stocastice discrete cu coeficienţi variabili in timp, in cazul infinit dimensional, am folosit două reprezentări ale mediei pătratice a soluţiilor sistemelor considerate. Astfel, o primă reprezentare a mediei pătratice a soluţiei ecuaţiei (2.2.1), foloseşte operatorul de evoluţie $Y(n,k)$ asociat sistemului determinist (2.2.2) şi conduce la stabilirea relaţiei

$$E\left\|X(n,k)x\right\|^2 = \left\|Y(n,k)(x\otimes x)\right\|_1$$

,oricare ar fi $x \in H$, unde $X(n,k)$ este operatorul de evoluţie aleator asociat sistemului liniar (2.2.1) iar H este un spaţiu Hilbert real, separabil. A doua reprezentare, dată de relaţia

$$\langle T(n,k)(S)x, y\rangle = E\,\langle SX(n,k)x, X(n,k)y\rangle\,,$$

este deja cunoscută in cazul finit dimensional ([**49**]) şi foloseşte operatorul $T(n,k)$ ($T(n,k)$ nu este operator de evoluţie) introdus in paragraful 2.2.1.

Teorema 2.2.5 stabileşte legătura care există intre cele două reprezentări, legătură exprimată prin relaţiile

$$\|Y(n,k)(x\otimes x)\|_1 = \langle T(n,k)(I)x, x\rangle$$
$$\|T(n,k)\| = \|Y(n,k)\|_1\,,$$

unde $\|Y(n,k)\|_1 = \sup\limits_{T\in\mathcal{N},\,\|T\|_1=1} \|Y(n,k)(T)\|_1$ şi I este operatorul identic pe H.

Cele două reprezentări introduse mai sus conduc la obţinerea unor condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială şi stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor discutate (teoremele T. 2.3.7, T. 2.3.8, T.2.4.1). În acest context, se observă că unul din avantajele primei reprezentări il constitue faptul că toate rezultatele obţinute cu ajutorul acesteia pot fi extinse cu uşurinţă şi la cazul spaţiilor Hilbert complexe (Teorema 2.3.4, Observaţia 2.3.6). Mai mult, problemele studiate sunt reduse la probleme similare din cazul determinist, probleme ce sunt tratate pe larg in literatura de specialitate, iar aceeaşi metodă de obţinere a primei reprezentări şi folosirea operatorilor de evoluţie care acţioneză pe spaţii Hilbert -Schmidt au condus la obţinerea unor reprezentări ale mediilor pătratice ale soluţiilor de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale stocastice, studiate in capitolul al treilea.

Teorema 2.3.20 şi Corolarul 2.4.2 stabilesc caracterizări ale stabilităţii exponenţiale uniforme in limbaj de ecuaţii Lyapunov. (Pentru cazul sistemelor deterministe cu coeficienţi variabili in timp, un rezultat similar este demonstrat in [**43**]). În cazul sistemelor invariante in timp s-au stabilit o serie de caracterizări ale stabilităţii exponenţiale uniforme precum şi faptul că aceasta este echivalentă cu stabilitatea exponenţială. Corolarul 2.4.2 este varianta staţionară a Teoremei 2.3.20 şi stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru a avea stabilitate exponenţială folosind ecuaţii Lyapunov algebrice.

A fost definită noţiunea de instabilitate exponenţială şi, folosind prima teoremă de reprezentare (Teorema 2.2.4) a mediei pătratice a soluţiei ecuaţiei (1.3.1), am obţinut caracterizări deterministe ale stabilităţii şi instabilităţii exponenţiale, similare celor stabilite de J.Zabczyk in [**77**], pentru stabilitatea exponenţială in cazul stocastic, sau de M.Megan şi P.Preda in [**43**], pentru cazul determinist.

Tot in acest capitol este introdusă noţiunea de observabilitate uniformă (a se vedea Definiţia 6 din [**50**], pentru cazul finit dimensional şi cea introdusă de J. Zabczyk in [**76**], pentru cazul infinit dimensional unde coeficienţii sunt invarianţi in timp). Am obţinut o caracterizare deterministă a conceptului de observabilitate uniformă precum şi condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor liniare stocastice discrete, uniform observabile, utilizând ecuaţiile Lyapunov.

În penultimul paragraf al acestui capitol, sunt considerate sisteme liniare discrete cu control, perturbate stocastic. Problema controlului liniar pătratic al sistemelor discutate a impus asocierea unei ecuaţii Riccati discrete şi studierea soluţiilor acesteia. Astfel, s-a demonstrat, prin analogie cu cazul finit dimensional ([**50**], [**52**],[**25**]), că, in condiţii de stabilizabilitate a sistemului cu control şi uniform observabilitate a sistemului liniar discret stocastic supus controlului, ecuaţia Riccati (2.6.4) are o soluţie uniform pozitivă şi mărginită pe $\mathbf{N}$ (Teorema 2.6.9) care este stabilizantă pentru sistemul cu control.

Ca o consecinţă a acestui rezultat, este obţinut controlul feedback care minimizează costul (2.6.3) asociat sistemului cu control (2.6.1).

În finalul acestui capitol este tratată problema dihotomiei exponenţiale a sistemelor liniare stocastice discrete. Folosind caracterizările deterministe ale stabilităţii şi instabilităţii exponenţiale, obţinute in paragraful al treilea al acestui capitol, au fost stabilite condiţii necesare şi suficiente pentru dihotomia exponenţială a sistemelor stocastice discrete.

În ultimul capitol sunt studiate ecuaţii diferenţiale stocastice definite pe spaţii Hilbert infinit dimensionale. Un prim paragraf al acestui capitol este dedicat obţinerii unei teoreme de reprezentare a mediei pătratice a soluţiei de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) in ipoteza că familia de operatori $A(t)$ are proprietatea P_1 iar coeficienţii $G_i, i = 1, 2, .., m$ aparţin spaţiului $C_s(\mathbf{R}_+, L(H))$. Astfel au fost demonstrate relaţiile (Teorema 3.2.8)

$$\langle E[y(t,s;\xi) \otimes y(t,s;\xi)]u, u\rangle = TrE\,(\xi \otimes \xi)\,Q(t,s;u \otimes u)$$

oricare ar fi $u \in \ H, \xi \in L^2_s\,(H)$ şi

$$E\,\|By(t,s;\xi)\|^2 = TrE\,(\xi \otimes \xi)\,Q(t,s;B^*B)$$

oricare ar fi $t \geq s \geq 0$ şi $\xi \in L^2_s\,(H)$, unde $B \in L(H)$, $y(t,s;\xi)$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) iar $s \to Q(t,s;R), R \in L^+(H)$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei Lyapunov (3.2.10) cu condiţia finală $Q(t) = R$.

Aceaste rezultate permit atât obţinerea unor caracterizări deterministe ale stabilităţii exponenţiale (uniforme sau nu) (teoremele T.3.3.2 şi T 3.8.2) şi a observabilităţii uniforme (Teorema 3.4.2), cât şi a altor restricţii la care ar fi supuse soluţiile de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale discutate, dacă acestea din urmă se pot exprima in funcţie de media pătratică a soluţiilor de evoluţie. Facem observaţia că o altă caracterizare deterministă a stabilităţii exponenţiale uniforme, care foloseşte la rândul ei ecuaţii Lyapunov (Teorema 3.3.5) a fost obţinută de G.Da Prato şi A. Ichikawa in [**11**], dar rezultatele sunt diferite.

Tot in acest capitol este introdusă noţiunea de observabilitate uniformă (a se vedea Definiţia 4 din [**47**] sau [**48**] pentru cazul finit dimensional) şi au fost date caracterizări ale stabilităţii exponenţiale uniforme a sistemelor diferenţiale stocastice uniform observabile, in limbaj de ecuaţii Lyapunov.

Astfel, a fost demonstrată Teorema 3.4.5 care stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor diferenţiale stocastice uniform observabile, cu ajutorul ecuaţiilor (diferenţiale) Lyapunov, in cazul general in care familia de operatori indeplineşte cerinţele ipotezei P_1 iar coeficienţii G_i satisfac condiţia slabă

$$G_i \in C_s(\mathbf{R}_+, L(H)), i = 1, 2..m.$$

În cazul in care $A, G_i \in C(\mathbf{R}_+, L(H)), i = 1, 2..m$ este clar că rămân valabile concluziile teoremei amintite mai sus dar se pot da şi demonstraţii directe, independente de cele folosite până acum.

Un alt paragraf al acestui capitol este dedicat studiului ecuaţiilor diferenţiale stocastice cu coeficienţi invarianţi in timp.

În acest caz este stabilită o proprietate suplimentară a reprezentării introduse in primul paragraf dată de relaţia

$$E\left\|B\ y(t,s;x)\right\|^2 = \left\langle Q(t-s,0;B^*B)x,x\right\rangle, t\geq s\geq 0, x\in H$$

şi este dată o teoremă de caracterizare a stabilităţii exponenţiale uniforme a sistemelor uniform observabile cu ajutorul ecuaţiilor Lyapunov algebrice (Teorema 3.6.1).

În penultimul paragraf al acestui capitol este considerată problema existenţei unei soluţii a ecuaţiei Riccati (3.7.4) asociată problemei controlului liniar pătratic al sistemului (1.4.1), care să fie stabilizantă (Definiţia 3.7.8) pentru acesta.

G.Da Prato şi I. Ichikawa au demonstrat in [**10**] că dacă ecuaţia $\{A, B; G_i\}$ este stabilizabilă (Definiţia 3.7.2) şi sistemul $\{A, C; G_i\}$ este detectabil (Definiţia 3.7.1) atunci ecuaţia Riccati (3.7.4) asociată problemei controlului liniar pătratic are o soluţie unică şi mărginită pe $\mathbf{R}_+$ care este stabilizantă pentru $\{A, B; G_i\}$. În acest paragraf, condiţia de detectabilitate a fost inlocuită cu cea de observabilitate uniformă şi am obţinut aceeaşi concluzie şi, in plus, faptul că soluţia ecuaţiei Riccati este uniform pozitivă (pentru cazul finit dimensional se poate vedea lucrarea [**48**]).

T.Morozan a demonstrat in [**47**] că, cel puţin in cazul finit dimensional, conceptele de stabilizabilitate şi detectabilitate şi respectiv, controlabilitate uniformă şi observabilitate uniformă sunt duale.

Pentru a arăta că rezultatul din această lucrare este diferit de cel obţinut de G.Da Prato şi I. Ichikawa, am construit un contra-exemplu care demonstrează că implicaţia "controlabilitatea uniformă implică stabilizabilitate" este falsă in cazul stocastic, spre deosebire de cazul determinist unde acest lucru are loc ([**39**], [**59**], [**9**]). În consecinţă, observabilitatea uniformă nu implică detectabilitatea şi rezultatul amintit mai sus este distinct de cel obţinut de G.Da Prato şi I. Ichikawa.

În finalul acestui capitol este tratată problema dihotomiei exponenţiale a ecuaţiilor diferenţiale stocastice. A fost definită noţiunea de dihotomie exponenţială (Definiţia 3.8.1) şi au fost date condiţii necesare şi suficiente (Teorema 3.8.3) pentru obţinerea acestei. Rezultatele obţinute reprezintă variante stocastice ale teoremelor de caracterizare a dihotomiei exponenţiale uniforme a ecuaţiilor de evoluţie deterministe din [**41**] şi [**36**].

Folosind Teorema 3.2.8 de reprezentare a mediei pătratice a soluţiei de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) am obţinut Teorema 3.8.2 care stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru dihotomia exponenţială folosind soluţia de evoluţie a ecuaţiei diferenţiale Lyapunov (3.5.3), pentru cazul in care avem indeplinite ipotezele teoremei de reprezentare.

Teorema 3.8.3 reprezintă varianta stocastică a unor rezultate similare stabilite de M.Megan şi C.Buşe in [**41**] şi M.Megan şi R.Laţcu in [**36**]. În final, sunt obţinute şi caracterizări ale dihotomiei exponenţiale cu ajutorul funcţiilor Lyapunov ([**42**], [**5**]).

Multe din rezultatele din aceasta lucrare au fost rodul discuţiilor autoarei cu domnul cercetator dr. Toader Morozan (cercetător principal I in cadrul Institutului de Matematică al Academiei Române). Din acest motiv doresc sa-i mulţumesc şi pe această cale domniei sale pentru ajutorul deosebit acordat in sensul cercetării acestui domeniu important al matematicii.

CAPITOLUL 1

REZULTATE ŞI NOŢIUNI FUNDAMENTALE

1. Operatori nucleari şi Hilbert-Schmidt

Vom considera H, V spaţii Hilbert separabile reale şi vom nota cu $L(H,V)$ mulţimea operatorilor liniari şi mărginiţi definiţi pe H cu valori in V. În cazul in care $H = V$ vom folosi notaţia $L(H)$ pentru $L(H,V)$. Notăm cu $\langle .,. \rangle$ produsul scalar pe H şi cu $a \otimes b$, $a \in H$, $b \in H$ operatorul din $L(H)$ definit prin formula $a \otimes b(h) = \langle h, b \rangle\, a$ pentru toţi $h \in H$.

Fie $A \in L(H)$. Vom folosi notaţia $A \geq 0$ pentru a desemna faptul ca operatorul A este nenegativ (sau pozitiv semidefinit) adică A este autoadjunct şi are proprietatea $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ oricare ar fi $x \in H$.

În cele ce urmează vom nota cu $\|.\|$ norma spaţiilor şi a operatorilor.

Pentru $A \in L(H)$, $A \geq 0$ folosim notaţia $A^{1/2}$ pentru operatorul rădăcină pătrată al lui A (a se vedea [**14**]) şi cu $|A|$ operatorul $(A^*A)^{1/2}$.

Fie $A \in L(H)$, $A \geq 0$ şi $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ o bază ortonormată in H. Definim $Tr(A)$ prin formula

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n \rangle \, .$$

$Tr(A)$ este bine definită deoarece, dacă $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ este o altă bază ortonormată in H atunci $Tr(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\|A^{1/2}e_n\right\|^2 =$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left\langle A^{1/2}e_n, v_m\right\rangle^2 = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\langle e_n, A^{1/2}v_m\right\rangle^2 =$
$\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left\|A^{1/2}v_m\right\|^2 = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \langle Av_m, v_m\rangle$.

În cele ce urmează vom prezenta câteva rezultate foarte cunoscute din teoria operatorilor (a se vedea [**1**], [**23**],[**21**]), rezultate ce vor fi necesare in capitolele care urmează.

Dacă notăm $\|A\|_2 = (TrA^*A)^{1/2}$, putem introduce *clasa operatorilor Hilbert Schmidt*, anume $C_2(H) = \{A \in L(H)/\ \|A\|_2 < \infty\}$([**12**]).

Teorema 1.1.1. *a) Dacă $A \in C_2(H)$ atunci A este compact.*

b) Definiţia operatorilor Hilbert-Schmidt considerată mai sus este echivalentă cu definiţiile operatorilor Hilbert-Schmidt din [**24**]*,* [**21**].

c) $C_2(H)$ dotat cu produsul scalar $\langle A, B\rangle_2 = TrB^*A$ este un spaţiu Hilbert ([**12**]*) şi*

$$TrAB = TrBA \tag{1.1.1}$$

oricare ar fi $A, B \in C_2(H)$.

d) Dacă $A \in C_2(H)$ şi $B \in L(H)$ atunci $A^*, AB, BA \in C_2(H)$ iar $\|BA\|_2 \le \|B\| \, \|A\|_2$ *(*[**21**]*)* .

e) Dacă $A \in C_2(H)$ şi $C_n, C \in L(H)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ şi C_n converge tare C la atunci C_nA converge in $\|.\|_2$ la CA [**22**].

Demonstraţie. a) Afirmaţia $A \in C_2(H)$ este echivalentă, conform teoremei T.2 din [**21**], cu faptul că A este operator Hilbert-Schmidt in sensul definiţiei din [**21**] şi, de aici, deducem că A este compact.

b) Definiţiile operatorilor Hilbert-Schmidt din [**24**] şi [**21**] sunt echivalente. De aici rezultă concluzia. Celelalte afirmaţii sunt demonstrate in lucrările citate. $\square$

Dacă $A \in L(H)$ definim $\|A\|_1 = Tr(|A|) \leq \infty$ şi notăm cu $C_1(H)$ mulţimea $\{A \in L(H)/ \|A\|_1 < \infty\}$ care va reprezenta mulţimea *operatorilor nucleari.* Avem teorema următoare:

Teorema 1.1.2. *a) Operatorii nucleari sunt compacţi.*

b) Definiţia operatorilor nucleari considerată mai sus este echivalentă cu definiţiile operatorilor nucleari din [**24**], [**21**].

c) $C_1(H)$ *este spaţiu Banach separabil in raport cu* $\|.\|_1$ *(*[**24**], [**21**]*).*

d) Un operator $A \geq 0$ *este nuclear dacă şi numai dacă* $Tr(A) < \infty$ [**21**].

e) Dacă $A \in C_1(H)$ *şi* $B \in L(H)$ *atunci* $A^*, AB, BA \in C_1(H)$ *şi* $\|BA\|_1 \leq \|B\| \, \|A\|_1$[**21**].

f) Dacă $A \in C_1(H)$ *şi* $B \in L(H)$ *atunci* $TrAB = TrBA$.

g) Dacă $A \in C_1(H)$ *şi* $C_n, C \in L(H)$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$ *şi* C_n *converge tare* C *la atunci* C_nA *converge in* $\|.\|_1$ *la* CA.

h) Dacă $\mathcal{S}$ *este familia tuturor sistemelor ortonormate din* H *atunci (*[**21**]*)*

$$\|A\|_1 = \sup_{\xi_n, \eta_n \in \mathcal{S}} \{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A\xi_n, \eta_n\rangle|\}. \tag{1.1.2}$$

Demonstraţie. Vom demonstra numai a), b), f) şi g). a) Folosind descompunerea polară a lui $A \in L(H)$ (Teorema 4.39 din [**14**]) deducem că operatorul A poate fi scris $A = V\,|A|$, unde V este o izometrie parţială a lui H. Deoarece $Tr(|A|) < \infty$, deducem că $\left\| |A|^{1/2} \right\|_2^2 = Tr(|A|) < \infty$ şi deci $|A|^{1/2}$ este un operator Hilbert-Schmidt. Din teorema de mai sus rezultă că $|A|^{1/2}$ este compact şi, de aici, $A = V\,|A|^{1/2}\,|A|^{1/2}$ este compact. Rezultă concluzia.

b) Conform a), rezultă că definiţia de mai sus a operatorilor nucleari şi cea din [**21**] sunt echivalente. Deoarece definiţiile operatorilor nucleari din [**24**] şi [**21**] sunt echivalente deducem că acestea sunt echivalente cu definiţia introdusă mai sus.

f) Din demonstraţia punctului a) rezultă că orice operator nuclear este produsul a doi operatori Hilbert-Schmidt. Folosind acest lucru şi punctul c) al Teoremei 1.1.1, rezultă ceea ce trebuia demonstrat. Pentru a demonstra g) observăm că deoarece orice operator nuclear A se scrie ca produsul a doi operatori Hilbert Schmidt A_1 şi A_2 ([**21**]) atunci $\|C_nA - CA\|_1 \leq \|(C_nA_1 - CA_1)\,A_2\|_1 \leq \|C_nA_1 - CA_1\|_2\,\|A_2\|_2$ iar $\|C_nA_1 - CA_1\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ conform punctului e) din Teorema 1.1.1. Restul afirmaţiilor din teoremă sunt demonstrate sau enunţate in lucrările citate. $\square$

Observaţia 1.1.3. *Din afirmaţia de la punctul h) al teoremei de mai sus rezultă că* $|TrA| \leq \|A\|_1$ *şi de aici, deducem că* $Tr : C_1(H) \to \mathbf{R}$ *este o aplicaţie continuă.*

Teorema de mai jos evidenţiază legătura care există intre operatorii nucleari şi Hilbert-Schmidt.

Teorema 1.1.4. *Dacă* $A \in C_1(H)$ *atunci avem* $\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$ *şi* $C_1(H) \subset C_2(H) \subset L(H)$ *(*[**24**] *şi* [**21**]*).*

Rezultatul de mai jos este bine-cunoscut, dar având o demonstraţie scurtă va fi prezentat cu demonstraţie.

Teorema 1.1.5. *Dacă* $A \in L(H)$ *este un operator compact,* $C_n, C \in L(H)$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$ *şi* C_n *converge tare la* C *atunci* C_nA *converge in* $\|.\|$ *la* CA.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $C_nA \underset{n\to\infty}{\not\to} CA$ in topologia normei $\|.\|$. Atunci există un număr pozitiv ε şi un subşir $\{n_k\}$ astfel incât $\|C_{n_k}A - CA\| > \varepsilon$ oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$. Ţinând cont de definiţia normei unui operator putem spune că există $x_{n_k} \in H, \|x_{n_k}\| = 1$ astfel incât $\|C_{n_k}Ax_{n_k} - CAx_{n_k}\| > \varepsilon$ oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$. Aplicăm Teorema 1.15.4 din [**33**] şi deducem că şirul Ax_{n_k} admite un subşir convergent cu limita $y \in H$. Pentru a nu complica scrierea vom nota acest subşir tot Ax_{n_k}. Avem $L = \lim\limits_{k\to\infty} \|C_{n_k}Ax_{n_k} - CAx_{n_k}\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|(C_{n_k} - C)(Ax_{n_k} - y) + (C_{n_k} - C)y\| \leq \lim\limits_{k\to\infty} \|(C_{n_k} - C)(Ax_{n_k} - y)\| + \lim\limits_{k\to\infty} \|(C_{n_k} - C)y\|$. Conform principiului mărginirii uniforme şi ipotezei, rezultă că există $M > 0$ astfel incât $\|C_{n_k} - C\| \leq M$. Acum este clar că $L = 0$, ceea ce contrazice faptul că $\|C_{n_k}Ax_{n_k} - CAx_{n_k}\| > \varepsilon$ oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$. $\square$

Corolarul 1.1.6. *Dacă $A \in C_1(H), A \geq 0$, $C_n, C \in L(H)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ şi C_n converge tare C la atunci $C_nAC_n^*$ converge in $\|.\|$ la CAC^*.*

Demonstraţie. Dacă $A \in C_1(H), A \geq 0$ atunci este clar că $A^{1/2}$ este Hilbert-Schmidt. Deci, $A^{1/2}$ este compact, conform rezultatelor prezentate mai sus. Din ultima teoremă rezultă că şirurile $C_nA^{1/2}$, $A^{1/2}C_n^*$ converg in topologia uniformă la $CA^{1/2}$, respectiv $A^{1/2}C^*$ şi rezultă concluzia. $\square$

Folosim notaţiile $\mathcal{E}$, $\mathcal{N}$ şi $\mathcal{H}_2$ pentru subspaţiile lui $L(H)$, $C_1(H)$ şi respectiv $C_2(H)$ formate din toţi operatorii autoadjuncţi. Deoarece $\mathcal{N}$ şi $\mathcal{H}_2$ sunt inchise in $C_1(H)$ şi respectiv $C_2(H)$ in raport cu norma $\|.\|_1$şi respectiv $\|.\|_2$ deducem că $\mathcal{N}$ este spaţiu Banach iar $\mathcal{H}_2$ este spaţiu Hilbert (cu produsul scalar introdus pe $C_2(H)$).

Teorema 1.1.7. *(a se vedea [**1**]) Dacă $A \in \mathcal{E}$ este un operator compact atunci există o bază ortonormată $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}^*} \subset H$ şi un şir*

$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathbf{R}$, $\lambda_n \to 0$ *astfel incât* $Ae_n = \lambda_n e_n$ *pentru toţi* $n \in \mathbf{N}^*$, *ceea ce inseamnă că*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n, \tag{1.1.3}$$

unde convergenţa este in norma operatorială. Pentru comoditatea exprimării vom spune că relaţia (1.1.3) este descompunerea Hilbert - Schmidt a lui A.

Propoziţia 1.1.8. *Fie A aparţinând lui* $\mathcal{N}$ *. Atunci, conform teoremei de mai sus, avem (1.1.3) şi* $\|A\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$.

Demonstraţie. Fie $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$ descompunerea Hilbert - Schmidt a lui A, unde e_n şi λ_n sunt definiţi ca mai sus. Dacă luăm $\xi_n = \eta_n = e_n$ in (1.1.2) avem $\|A\|_1 \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle Ae_n, e_n\rangle| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$. De aici rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$ este convergentă. Considerăm seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| e_n \otimes e_n$.

Deoarece $|\lambda_n| e_n \otimes e_n \geq 0$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}^*$, deducem din definiţia lui $\|.\|_1$ că $\left\| \sum\limits_{n=p}^{m} |\lambda_n| e_n \otimes e_n \right\|_1 = \sum\limits_{n=p}^{m} |\lambda_n| \|e_n \otimes e_n\|_1 = \sum\limits_{n=p}^{m} |\lambda_n|$. Datorită faptului că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$ este convergentă, deducem că ea este Cauchy şi conform ultimei egalităţi rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| e_n \otimes e_n$ este $\|.\|_1$ Cauchy. În consecinţă, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| e_n \otimes e_n$ este $\|.\|_1$ convergentă.

Dacă notăm $Q = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| e_n \otimes e_n$, se vede că $Q \in \mathcal{N}$ şi $Q \geq 0$. Calculând avem $Q^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e_n \otimes e_n = A^2$. Conform teoremei de unicitate a operatorului rădăcină pătrată obţinem $Q = |A|$. Acum este clar că $\|A\|_1 = TrQ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$. Demonstraţia este completă. $\square$

Folosind Teorema 1.1.7 este uşor de stabilit ([**21**]) corolarul următor :

Corolarul 1.1.9. *Dacă* $A \in \mathcal{N}$ *şi* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$ *este descompunerea Hilbert -Schmidt a lui* A *(Teorema 1.1.7), unde convergenţa seriei este in normă atunci* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$ *este convergentă in* $\|.\|_1$.

Fie $a \in H$. Facem observaţia că operatorul $a \otimes a \in L(H)$ este nenegativ şi $Tra \otimes a = \|a\|^2 < \infty$. Dacă $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ este o bază ortonormală a lui H, avem $\|a \otimes a\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\langle a, e_n \rangle a\|^2 = \|a\|^4 < \infty$. Deci $a \otimes a$ este nuclear şi Hilbert- Schmidt şi

$$\|a \otimes a\|_1 = \|a \otimes a\|_2 = \|a\|^2 . \tag{1.1.4}$$

Propoziţia 1.1.10. *Fie* $A \in L(H)$ *şi* $x \in H$. *Atunci*

$$\langle Ax, x \rangle = TrA(x \otimes x).$$

Demonstraţie. Deoarece $x \otimes x \in C_1(H)$, avem $A(x \otimes x) \in C_1(H)$ (conform Teoremei 1.1.2) şi, in consecinţă, $TrA(x \otimes x)$ este bine definit. Fie $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ o bază ortonormată in H.

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ax, e_n \rangle e_n, x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ax, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle [(Ax) \otimes x](e_n), e_n \rangle = Tr(Ax) \otimes x = TrA(x \otimes x).$$

$\square$

2. Variabile aleatoare stocastice şi integrala stocastică in spaţii Hilbert infinit dimensionale

2.1. Variabile aleatoare. Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ un spaţiu măsurabil, unde Ω este o mulţime şi $\mathcal{F}$ este o σ - algebră de submulţimi ale lui Ω. Presupunem că E este un spaţiu metric. Vom nota cu $\mathcal{B}(E)$, σ - algebra submulţimilor Boreliene ale lui E.

Definiţia 1.2.1. ([**12**]) O funcţie $X : \Omega \to E$, măsurabilă in raport cu spaţiile măsurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ şi $(E, \mathcal{B}(E))$, se numeşte *variabilă aleatoare* cu valori in E. Spunem că o variabilă aleatoare este *simplă* dacă ia un număr finit de valori.

Propoziţia 1.2.2. *([**12**]) Fie E un spaţiu Banach separabil. Atunci $\mathcal{B}(E)$ este σ - algebra generată de mulţimea $K = \{\{x \in E : \varphi(x) \leq \alpha\}, \varphi \in E^*, \alpha \in \mathbf{R}\}$, unde am notat cu E^* spaţiul dual al spaţiului E.*

Consecinţa 1.2.3. *([**12**]) Funcţia $X : \Omega \to E$ este o variabilă aleatoare cu valori in E dacă şi numai dacă $\varphi(X) : \Omega \to \mathbf{R}$ este o variabilă aleatoare cu valori reale oricare ar fi $\varphi \in E^*$.*

Definiţia 1.2.4. ([**12**]) O *măsură de probabilitate* P pe spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$ este o funcţie σ-aditivă definită pe $\mathcal{F}$ cu valori in $[0, 1]$ astfel incât $P(\Omega) = 1$. Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se numeşte *spaţiu de probabilitate.*

Lema de mai jos este demonstrată in [**12**].

Lema 1.2.5. *Dacă E este un spaţiu metric separabil cu metrica ρ şi X este o variabilă aleatoare cu valori in E atunci există un şir $\{X_m\}$ de variabile aleatoare simple cu valori in E astfel incât pentru orice $\omega \in \Omega$ şirul $\{\rho(X(\omega), X_m(\omega))\}$ este monoton descrescător şi convergent la zero.*

Fie P o măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$ şi E un spaţiu Banach separabil, a cărui normă o vom nota cu $\|.\|$. Lema 1.2.5 permite introducerea integralei unei variabile aleatoare definită pe Ω cu valori in E.

Dacă X este o variabilă aleatoare simplă $X = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $x_i \in E$ atunci

$$\int_B X(\omega)P(d\omega) = \int_B X dP = \sum_{i=1}^{N} x_i P(Ai \cap B) \tag{1.2.1}$$

oricare ar fi $B \in \mathcal{F}$, unde am notat prin χ_{A_i} funcţia caracteristică a mulţimii A_i.

Din [**12**] rezultă că definiţia integralei (1.2.1) nu depinde de modul de reprezentare al lui X , integrala are proprietăţi de aditivitate şi liniaritate iar

$$\left\| \int_B X(\omega)P(d\omega) \right\| \leq \int_B \|X(\omega)\| P(d\omega).$$

Pentru a defini integrala in cazul general al variabilelor aleatoare oarecare avem nevoie de lema de mai jos.

Lema 1.2.6. *([**12**]) Dacă E este un spaţiu Banach separabil şi X o variabilă aleatoare definită pe (Ω, F) cu valori in E atunci funcţia cu valori reale $\|X(.)\|$ este măsurabilă.([**12**]).*

Definiţia 1.2.7. Variabila aleatoare X se numeşte *Bochner integrabilă* sau simplu *integrabilă* dacă

$$\int_B \|X(\omega)\| P(d\omega) < \infty. \tag{1.2.2}$$

Integrala (1.2.2) are sens datorită lemei de mai sus.

Dacă X este o variabilă aleatoare integrabilă, generală, atunci aplicăm Lema 1.2.5 şi deducem că există şirul $\{X_m\}$ de variabile aleatoare simple astfel incât şirul $\|X(\omega) - X_m(\omega)\|$ este monoton descrescător la zero şi vom defini

$$\int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} X_n(\omega)P(d\omega). \tag{1.2.3}$$

Integrala este bine definită deoarece limita de mai sus există ([**12**]).

Integrala definită mai sus se mai notează $E(X)$ şi se numeşte integrala Bochner sau media variabilei aleatoare X şi păstrează multe din proprietăţile integralei Lebesgue.

Propoziţia care urmează stabileşte condiţii necesare pentru ca un operator liniar să comute cu integrala definită mai sus.

Propoziţia 1.2.8. *([**12**]) Presupunem că E și F sunt două spaţii Banach separabile și $A : D(A) \subseteq E \to F$ este un operator inchis cu domeniul $D(A)$ submulţime Boreliană a lui E. Dacă $X : \Omega \to E$ este o variabilă aleatoare astfel incât $X(\omega) \in D(A)$ P.a.s atunci $A(X)$ este o variabilă aleatoare cu valori in F și X este o variabilă aleatoare cu valori in $D(A)$, unde $D(A)$ este inzestrat cu norma graficului lui A. Dacă, mai mult $\int_{\Omega} \|AX(\omega)\| P(d\omega) < \infty$ atunci*

$$A\int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \int_{\Omega} AX(\omega)P(d\omega). \tag{1.2.4}$$

În majoritatea calculelor din această lucrare este necesar să aplicăm teorema lui Fubini. Astfel avem propoziţia de mai jos :

Propoziţia 1.2.9. *([**12**], pag 20,21). Dacă E este un spaţiu Banach separabil, $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$,$(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ sunt două spaţii măsurabile iar μ_1 și μ_2 sunt două măsuri măsuri σ-finite pe $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ și $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ iar $X : \Omega_1\times$*

$\Omega_2 \to E$ *este o variabilă aleatoare masurabilă de la* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ *la* $(E, \mathcal{B}(E))$ *şi Bochner integrabilă adică* $\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} \|X(\omega_1, \omega_2)\| \, d\mu_1(\omega_1) \otimes \mu_2(\omega_2) < \infty$ *atunci*

$$\int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) d\mu_1(\omega_1) = \int\limits_{\Omega_2} \int\limits_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1) d\mu_2(\omega_2).$$

În propoziţia de mai sus inţelegem prin $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ cea mai mică $\sigma-$algebră de submulţimi ale lui $\Omega_1 \times \Omega_2$ care conţine toate mulţimile de forma $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$, adică $\sigma-$algebra produs.

2.2. Independenţă stocastică. Fie $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ o familie de $\sigma-$algebre ale lui $\mathcal{F}$. Aceste $\sigma-$algebre se numesc *independente* dacă pentru orice submulţime finită $J \subset I$ şi orice familie $\{A_i\}_{i \in J}$ astfel incât $A_i \in F_i, i \in J$ avem

$$P(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

Definiţia 1.2.10. ([**12**]) Variabilele aleatoare $\{X_i\}_{i \in I}$ se numesc *independente* dacă $\sigma-$algebrele $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$ sunt independente, unde $\sigma(X_i)$ este cea mai mică $\sigma-$algebră a lui Ω in raport cu care X_i este măsurabilă.

2.3. Procese stocastice. Presupunem că E este un spaţiu Banach separabil iar $\mathcal{B}(E)$ este $\sigma-$algebra submulţimilor Boreliene. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un spaţiu de probabilitate şi fie I un interval al mulţimii numerelor reale.

Definiţia 1.2.11. ([**12**]) O familie arbitrară $X = \{X(t)\}_{t \in I}$ de variabile aleatoare definite pe Ω cu valori in E se numeşte *proces stocastic*. Se mai spune că X este un *proces stocastic* pe I.

Vom nota $X(t,\omega) = X(t)(\omega)$ oricare ar fi $t \in I$ şi $\omega \in \Omega$. Funcţiile $X(.,\omega)$ se numesc *traiectoriile* lui $X(t)$.

Definiţia 1.2.12. ([**12**]) Se spune că procesul stocastic Z este o *modificare* sau o *variantă* a lui X dacă $P(\omega \in \Omega : X(t,\omega) \neq Y(t,\omega)) = 0$ oricare ar fi $t \in I$.

În definiţia de mai jos vom considera $I = [0,T]$.

Definiţia 1.2.13. ([**12**]) a) Procesul stocastic X este *măsurabil* dacă funcţia $X(.,.) : I \times \Omega \to E$ este $B(I) \times F$-măsurabilă.

b) X este *stocastic continuu* in $t_0 \in I$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$ există $\rho > 0$ astfel incât $P(\|X(t) - X(t_0)\| \geq \varepsilon) \leq \delta$ pentru orice $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \cap [0,T]$.

c) X este *stocastic continuu pe* I dacă este stocastic continuu in orice punct al lui I.

d) X este *continuu in medie patratică in* $t_0 \in I$ dacă
$\lim\limits_{t \to t_0} E(\|X(t) - X(t_0)\|^2) = 0.$

e) X este *continuu in medie patratică* pe I dacă este continuu in medie patratică in orice punct al lui I.

Având in vedere definiţia de mai sus, rezultă, aplicând inegalitatea lui Cebişev, că un proces *continuu* in *medie pătratică* este *stocastic continuu.*

Dacă H este un spaţiu Hilbert şi $C([0,T], L^2(\Omega, H))$ este spaţiul tuturor funcţiilor continue $X, X : [0,T] \to L^2(\Omega, H)$ iar $L^2(\Omega, H)$ este spaţiul Hilbert al tuturor claselor de echivalenţă ale variabile aleatoare ξ cu valori in H, care au proprietatea $E\|\xi\|^2 < \infty$ atunci observaţia de mai jos are loc conform teoremei lui Fubini..

Observaţia 1.2.14. *Dacă* $X(t), t \in [0,T]$ *este un proces stocastic cu valori in* H *astfel incât* $X \in C([0,T], L^2(\Omega, H))$ *atunci*

$$\int_0^T E(\|X(t)\|^2)dt = E\int_0^T \|X(t)\|^2\, dt$$

2.4. Procese cu filtraţie. Presupunem că $I = [0,T]$ sau $I = [0,\infty)$ şi că spaţiul de probabilitate este echipat cu o familie crescătoare de σ - algebre $\{\mathcal{F}_t\}, t \in I$, numită *filtraţie*. Dacă notăm cu $\mathcal{F}_{t^+}$ intersecţia tuturor σ - corpurilor $\mathcal{F}_s$ cu $s > t$ atunci vom spune că filtraţia este *normală* dacă avem indeplinite condiţiile:

i) $\mathcal{F}_0$ conţine toate mulţimile $A \in \mathcal{F}$ astfel incât $P(A) = 0$,

ii) $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$, oricare ar fi $t \in T$.

Definiţia 1.2.15. ([**12**]) Procesul stocastic X este *adaptat* (la familia $\mathcal{F}_t$) dacă pentru fiecare $t \in I$ variabila aleatoare $X(t)$ este $\mathcal{F}_t$-măsurabilă.

Definiţia 1.2.16. Procesul stocastic X este *nonanticipativ in raport cu familia* $\mathcal{F}_{t\in I}$ dacă este măsurabil şi $\mathcal{F}_t$-adaptat.

Definiţia 1.2.17. ([**12**]) Procesul stocastic X este *progresiv măsurabil* dacă oricare ar fi $t \in [0,T]$ funcţia

$$[0,t] \times \Omega \to E,\ (s,\omega) \to X(s,\omega)$$

este $B([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ măsurabilă.

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{P}_\infty$, $\sigma-$algebra de submulţimi ale lui $[0,\infty)\times\Omega$ generată de mulţimile de forma :$(s,t]\times F$, $0 \leq s < t < \infty$, $F \in \mathcal{F}_s$ şi $\{0\} \times F$, $F \in \mathcal{F}_0$.

Această $\sigma-$ algebră se numeşte *$\sigma-$ algebră predictibilă* iar elementele sale se numesc *mulţimi predictibile.* Restricţia lui $\mathcal{P}_\infty$ la $[0,T]\times\Omega, T\geq 0$ se va nota $\mathcal{P}_T$.

Definiţia 1.2.18. ([**12**]) O funcţie măsurabilă definită pe $([0,\infty)\times\Omega,\mathcal{P}_\infty)$ (sau pe $([0,T]\times\Omega,\mathcal{P}_T)$) cu valori in $(E,\mathcal{B}(E))$ se numeşte *proces predictibil.*

Un proces predictibil este şi adaptat.

Rezultatul următor este demonstrat in [**12**].

Propoziţia 1.2.19. *(*[**12**]*) Dacă $X(t), t\in[0,T]$ este un proces adaptat, stocastic continuu pe $[0,T]$ atunci X admite o modificare predictibilă.*

Observaţia 1.2.20. *Dacă $X(t), t\in[0,T]$ este un proces stocastic cu valori in H, progresiv măsurabil astfel incât $X\in C([0,T],L^2(\Omega,H))$ atunci el este adaptat şi stocastic continuu şi deci admite o modificare predictibilă.*

2.5. Integrala stocastică. Fie $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un spaţiu de probabilitate.

Definiţia 1.2.21. ([**17**], [**6**]) Un proces stocastic $w(t)$, $t\geq 0$ cu valori in $\mathbf{R}$ se numeşte *proces Wiener* sau *proces standard al mişcării Browniene* dacă:

i) $w(0)=0$;

ii) w are traiectorii continue;

iii) w are creşteri independente, adică oricare ar fi secvenţa finită $0\leq t_0\leq t_1\leq ...\leq t_n$ variabilele aleatoare $w(t_1)-w(t_2)$,$w(t_2)-w(t_3)$,..., $w(t_n)-w(t_{n-1})$ sunt independente

iv) $E(w(t)) = 0, E\left|w(t) - w(s)\right|^2 = |t - s|$ oricare ar fi $t \geq 0$, $s \geq 0$.

Definiţia 1.2.22. ([**17**], [**6**]) Un proces Wiener $w(t), t \geq 0$ se numeşte *proces Wiener in raport cu filtraţia* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ dacă

i) $w(t)$ este $\mathcal{F}_t$ -măsurabil (adică w este $\mathcal{F}_t$ -adaptat) şi

ii) σ- algebra generată de $\{w(t+h) - w(t), h \geq 0\}$ este independentă de $\mathcal{F}_t$,oricare ar fi $t \geq 0$.

În continuare vom defini integrala stocastică.

Fie $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ o filtraţie (bază stochastică) normală definită in raport cu spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ şi $\{w(t)\}_{t\geq 0}$ un proces Wiener (cu valori reale) in raport cu filtraţia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Fie T fixat , $0 \leq T < \infty$.

Definiţia 1.2.23. ([**12**]) Un proces stocastic $\Phi(t)$, $t \in [0, T]$ cu valori in H care ia doar un număr finit de valori se numeşte *elementar* dacă există şirul $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = T$ şi şirul Φ_0, Φ_1, Φ_2, ..., Φ_k de variabile aleatoare simple (care iau un număr finit de valori) cu valori in H astfel incât Φ_m este $\mathcal{F}_m$ - măsurabilă şi $\Phi(t) = \Phi_m$ oricare ar fi $t \in (t_m, t_{m+1}]$, $m = 0, 1, ..., k-1$.

Definiţia 1.2.24. *Dacă* $\Phi(t)$ este un *proces stocastic elementar* cu va- lori reale atunci, prin definiţie

$$\int_0^T \Phi(t) dw(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi(t_m)(w(t_{m+1}) - w(t_m)).$$

Definiţia integralei stocastice a unui proces stocastic oarecare, nonanticipativ cu valori reale şi proprietăţile ei sunt date de teorema următoare ([**6**], [**17**]).

Teorema 1.2.25. *Fie* $\Phi(t)$, $t \in [0,T]$ *un proces stocastic nonanticipativ cu valori reale in raport cu filtraţia* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *care are proprietatea că* $P(\int_0^T \|\Phi(t)\|^2\, dt < \infty) = 1$. *Atunci*

1) există şirul de procese elementare $\{\Phi_n\}$ *astfel incât*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |\Phi(t) - \Phi_n(t)|^2\, dt = 0$$

cu probabilitatea 1 iar şirul $\int_0^T \Phi_n(t)dw(t)$ *are limită in probabilitate; această limită nu depinde de şirul* $\Phi_n(t)$ *de procese elementare, se notează* $\int_0^T \Phi(t)dw(t)$ *şi se numeşte integrala stocastică a lui* Φ *in raport cu procesul Wiener* $w(t)$*;*

2) procesul stocastic

$$z(t) = \int_0^t \Phi(s)dw(s) = \int_0^T \chi_{[0,t]}(s)\Phi(s)dw(s), t \in [0,T]$$

are traiectorii continue şi este nonanticipativ in raport cu filtraţia $\{\mathcal{F}_t\}_{T\geq t\geq 0}$*;*

3) dacă, in plus, $E\int_0^T |\Phi(t)|^2\, dt < \infty$ *atunci* $E[\int_0^T \Phi(t)dw(t)] = 0$ *şi*

$$E[\int_0^T \Phi(t)dw(t)]^2 = E[\int_0^T \Phi^2(t)dt].$$

În continuare vom defini (conform [**13**] şi [**12**]) integrala stocastică a unui proces stocastic $\Phi(t)$ care ia valori intr-un spaţiu Hilbert real şi separabil H, in raport cu un proces Wiener $w(t)$ in raport cu filtraţia $\{\mathcal{F}_t\}_{T\geq t\geq 0}$. Teorema de mai jos defineşte aceasta integrală stocastică stabilind in acelaşi timp proprietăţile ei.

Teorema 1.2.26. *(*[**13**] , [**12**]*) Fie $\Phi(t)$, $t \in [0,T]$ un proces stocastic predictibil cu valori in H care are proprietatea că $E\int\limits_0^T \|\Phi(t)\|^2\,dt < \infty$. Fie $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ o bază ortonormată in H. Considerăm seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T \langle \Phi(t), e_n\rangle\, dw(t)\right] e_n. \tag{1.2.5}$$

Ea este convergentă cu probabilitatea 1 și suma sa, notată $\int\limits_0^T \Phi(t)dw(t)$ este independentă de alegerea bazei. și are proprietățile următoare:

1) $E[\int\limits_0^T \Phi(t)dw(t)] = 0$, $E\left\|\int\limits_0^T \Phi(t)dw(t)\right\|^2 = E\int\limits_0^T \|\Phi(t)\|^2\,dt$ și

$$\left\langle x, \int_0^T \Phi(t)dw(t)\right\rangle = \int_0^T \langle x, \Phi(t)\rangle\, dw(t),\ \textit{oricare ar fi } x\in H$$

2) procesul stocastic $z(t) = \int\limits_0^t \Phi(s)dw(s)$, $t\in[0,T]$ are traiectorii continue și $z(t)$ este $\{\mathcal{F}_t\}_{T\ge t\ge 0}$ adaptat iar dacă $A\in L(H)$ atunci $A\int\limits_0^T \Phi(t)dw(t) = \int\limits_0^T A\Phi(t)dw(t)$

3) Dacă $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir de procese predictibile cu proprietatea că $\int\limits_0^T E\|\Phi_n(t)\|^2\,dt < \infty$ și

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T E\|\Phi(t)-\Phi_n(t)\|^2\,dt = 0$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} E\left\|\int_0^T \Phi(t)dw(t) - \int_0^T \Phi_n(t)dw(t)\right\|^2 = 0.$$

Definiţia 1.2.27. Suma seriei *(1.2.5)* reprezintă *integrala stocastică* a procesului stocastic Φ *in* raport cu procesul Wiener $w(t)$. Procesul Φ se numeşte *stocastic integrabil* in raport cu procesul Wiener $w(t)$.

2.6. Formula lui Ito. Teorema lui Fubini stocastică. Fie Φ un proces stocastic integrabil pe $[0,T]$ (in raport cu procesul Wiener $w(t)$) cu valori in H ,φ un proces predictibil cu valori in H, Bochner integrabil pe $[0,T]$ P- a.s şi $x(0)$ o variabila aleatoare cu valori in H, $\mathcal{F}_0$-măsurabilă. Atunci procesul

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dw(s), \tag{1.2.6}$$

$t \in [0,T]$ este bine definit.

Presupunem că funcţia $F : [0,T] \times H \to \mathbf{R}$ şi derivatele sale parţiale F_t, F_x, F_{xx} sunt uniform continue pe submulţimi mărginite ale mulţimii $[0,T] \times H$.

Atunci are loc teorema următore a cărei demonstraţie se găseşte in [**8**], [**12**] şi care joacă un rol foarte important in studiul ecuaţiilor diferenţiale stocastice.

Teorema 1.2.28. ***(Formula lui Ito)*([12], [8])** *Dacă avem indeplinite condiţiile de mai sus P-a.s pentru orice $t \in [0,T]$ atunci*

$$F(t, x(t)) = F(0, x(0)) + \int_0^t F_x(s, x(s))\Phi(s)dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \{F_t(s, x(s)) + F_x(s, x(s))(\varphi(s)) + 1/2 F_{xx}(s, x(s))(\Phi(s), \Phi(s))\}ds$$

Teorema 1.2.29. *(lui **Fubini stocastică**)([**12**]). Fie $(E, \mathcal{E})$ un spaţiu măsurabil şi $\Phi : (t, \omega, x) \to \Phi(t, \omega, x)$ o funcţie măsurabilă de la $(\Omega_T \times E, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(E))$ la $(H, \mathcal{B}(H))$. În plus considerăm şi măsura pozitivă μ pe $(E, \mathcal{E})$. Dacă $\int\limits_E |\Phi(., ., x)|_T \, \mu(dx) < \infty$ atunci*

$$\int\limits_E \left[\int\limits_0^T \Phi(t, \omega, x) dw(t) \right] \mu(dx) = \int\limits_0^T \left[\int\limits_E \Phi(t, \omega, x) \mu(dx) \right] dw(t).$$

3. Ecuaţii liniare stocastice discrete in spaţii Hilbert infinit dimensionale

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un spaţiu de probabilitate. Considerăm sistemul stocastic :

$$x_{n+1} = A_n x_n + \xi_n B_n x_n \ , \qquad (1.3.1)$$
$$x_k = x, x \in H$$

unde A_n, $B_n \in L(H)$, ξ_n sunt variabile aleatoare reale independente care satisfac condiţiile $E(\xi_n) = 0$ şi $E\left|\xi_n\right|^2 = b_n < \infty$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ este mulţimea numerelor naturale).

Notăm cu $X(n, k)$, $n \geq k \geq 0$ operatorul de evoluţie aleator asociat sistemului liniar (1.3.1) definit astfel:

$$X(k, k) = I \quad \text{şi}$$

$$X(n, k) = (A_{n-1} + \xi_{n-1} B_{n-1}) ... (A_k + \xi_k B_k)$$

pentru toţi $n > k$.

Dacă $x_n = x_n(k, x)$ este soluţia sistemului (1.3.1) atunci aceasta este unică (după cum este uşor de văzut) şi $x_n(k, x) = X(n, k)x$.

Dacă $n > k$ atunci există o funcţie continuă $F : \mathbf{R}^{n-k} \to H$ (F este dependentă de n, k, x) astfel incât $x_n(\omega) = F(\xi_k(\omega), ..., \xi_{n-1}(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Astfel , rezultă că x_n este o variabilă aleatoare cu valori in H.

Se poate demonstra, folosind inducţia, că $x_n \in L^2(\Omega, H)$. Vom prefera să demonstrăm lema de mai jos care este mai generală şi din care se poate obţine ca un caz particular afirmaţia de mai sus.

Fie $\mathcal{F}_n$ $\sigma-$ algebra generată de familia de variabile aleatoare $\{\xi_i, i \leq n-1\}$ şi $L_n^2(H) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P, H)$.

Lema 1.3.1. *$X(n,k)$ este un operator liniar şi mărginit definit pe $L_k^2(H)$ cu valori in $L_n^2(H)$ şi avem*

$$E\left\|X(k,k)(\xi)\right\|^2 \leq E\left\|\xi\right\|^2,$$

$$E\left\|X(n,k)(\xi)\right\|^2 \leq (\left\|A_{n-1}\right\|^2 + b_{n-1}\left\|B_{n-1}\right\|^2)...(\left\|A_k\right\|^2 + b_k\left\|B_k\right\|^2)E\left\|\xi\right\|^2$$

pentru toţi $n > k$ şi $\xi \in L_k^2(H)$.

Demonstraţie. Folosim inducţia pentru a demonstra că $X(n,k)$ este un operator liniar şi mărginit din $L(L_k^2(H), L_n^2(H))$ pentru toţi $p = n-k, p \in \mathbf{N}$.

Pentru $p = 0$ avem $n = k$ şi rezultă concluzia. Presupunem că $X(n,k) \in L(L_k^2(H), L_n^2(H))$ pentru toţi $n \geq k \geq 0$ care au proprietatea $n - k = p$.

Vom demonstra afirmaţia pentru toţi $n \geq k \geq 0$, $n - k = p + 1$.

Fie $n, k \in \mathbf{N}$ astfel incât $n - k = p + 1$ şi fie $\eta \in L_k^2(H)$. Deoarece $X(n,k)(\eta) = X(n, n-1)X(n-1,k)(\eta)$ şi $n - 1 - k = p$, se poate folosi ipoteza de inducţie şi deducem $Y = X(n-1,k)(\eta) \in L_{n-1}^2(H)$.

Din definiţia lui $X(n,k)$ obţinem $X(n,k)(\eta) = (A_{n-1} + \xi_{n-1}B_{n-1})(Y) = A_{n-1}(Y) + \xi_{n-1}B_{n-1}(Y)$.

Observăm (conform Consecinţei 1.2.3) că funcţia $\eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (H, \mathcal{B}(H))$ este o variabilă aleatoare cu valori in H dacă şi numai dacă pentru orice $x \in H$ arbitrar, $\langle \eta, x \rangle : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbf{R}$ este o variabilă aleatoare reală.

Dacă $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (H, \mathcal{B}(H))$ sunt două variabile aleatoare atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n \rangle \langle \eta, e_n \rangle$ converge la $\langle \xi, \eta \rangle$, P - a.s. pentru orice bază ortonormată $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ din H. Deoarece $\langle \xi, e_n \rangle, \langle \eta, e_n \rangle, n \in \mathbf{N}^*$ sunt variabile aleatoare reale (conform observaţiei de mai sus) deducem că $< \xi, \eta >$ este o variabilă aleatoare reală.

Pentru fiecare $x \in H$ avem $\langle A_{n-1}(Y) + \xi_{n-1} B_{n-1}(Y), x \rangle = \left\langle Y, A_{n-1}^* x \right\rangle + \xi_{n-1} \left\langle Y, B_{n-1}^* x \right\rangle$. Din cele spuse mai sus deducem că $\left\langle Y, A_{n-1}^* x \right\rangle$ şi $\left\langle Y, B_{n-1}^* x \right\rangle$ sunt variabile aleatoare reale măsurabile in raport cu $\sigma-$ algebra $\mathcal{F}_{n-1}$; de aici $A_{n-1}(Y), B_{n-1}(Y)$ sunt variabile aleatoare cu valori in H, $\mathcal{F}_{n-1}-$ măsurabile. Deoarece ξ_{n-1} este $\mathcal{F}_n-$ măsurabilă şi $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ este clar că $\langle A_{n-1}(Y) + \xi_{n-1} B_{n-1}(Y), x \rangle$ este $\mathcal{F}_n-$ măsurabilă.şi in consecinţă $A_{n-1}(Y) + \xi_{n-1} B_{n-1}(Y)$ este $\mathcal{F}_n-$ măsurabilă. De aici $X(n,k)(\eta)$ este $\mathcal{F}_n-$ măsurabilă. Deoarece ξ_n este $\mathcal{F}_n-$independentă, $X(n,k)(\eta)$ şi ξ_n sunt independente pentru toţi $n - k = p + 1$.

Conform consideraţiilor de mai sus deducem că $\langle B_{n-1}(Y), A_{n-1}(Y) \rangle$, $\langle B_{n-1}(Y), B_{n-1}(Y) \rangle$sunt $\mathcal{F}_{n-1}-$ măsurabile şi $\{\xi_{n-1}, \langle B_{n-1}(Y), A_{n-1}(Y) \rangle\}$, $\{\xi_{n-1}, \langle B_{n-1}(Y), B_{n-1}(Y) \rangle\}$ sunt sisteme independente.

Astfel

$$E \left\| X(n,k)(\eta) \right\|^2 = E \left\langle A_{n-1}(Y) + \xi_{n-1} B_{n-1}(Y), A_{n-1}(Y) + \xi_{n-1} B_{n-1}(Y) \right\rangle =$$

$$= E \left\| A_{n-1}(Y) \right\|^2 + 2E(\xi_{n-1}) E(\langle B_{n-1}(Y), A_{n-1}(Y) \rangle) +$$

$$+ E(\xi_{n-1}^2) E(\| B_{n-1}(Y) \|^2) = E \left\| A_{n-1}(Y) \right\|^2 + b_{n-1} E \left\| B_{n-1}(Y) \right\|^2 .$$

Putem scrie

$$E\|X(n,k)(\eta)\|^2 \leq (\|A_{n-1}\|^2 + b_{n-1}\|B_{n-1}\|^2)E\|Y\|^2.$$

Din ipoteza de inducţie obţinem

$$E\|X(n,k)(\eta)\|^2 \leq (\|A_{n-1}\|^2 + b_{n-1}\|B_{n-1}\|^2)...(\|A_k\|^2 + b_k\|B_k\|^2)E\|\eta\|^2$$

pentru toţi $\eta \in L_k^2(H)$.

Este clar că $X(n,k)$ este liniar şi din ultima inegalitate rezultă că $X(n,k)$ este mărginit.

Demonstraţia este terminată . □

Lema de mai sus are următorul corolar .

Corolarul 1.3.2. *Dacă A_n, B_n şi b_n sunt mărginiţi pe* $\mathbf{N}$ *şi* $\widetilde{A} = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|A_n\|$, $\widetilde{B} = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|B_n\|$, $\widetilde{b} = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|b_n\|$ *atunci*

$$\|X(n,k)\| \leq \max\{1, (\widetilde{A}^2 + \widetilde{b}\widetilde{B}^2)^{(n-k)/2}\},$$

unde

$$\|X(n,k)\|^2 = \sup_{\eta\in L_k^2(H), \|\eta\|_{L_k^2(H)}=1} E\|X(n,k)\eta\|^2$$

pentru toţi $n \geq k$.

Observaţia 1.3.3. *Dacă x_n este soluţia sistemului (1.3.1) atunci, conform Lemei 1.3.1 rezultă că $x_n = X(n,k)x$ este $\mathcal{F}_n-$ măsurabilă şi $E\|x_n\|^2 < \infty$. Deoarece ξ_n este $\mathcal{F}_n-$ independentă deducem că $\{x_n, \xi_n\}$(sau echivalent $\{X(n,k)x, \xi_n\}$) sunt independente oricare ar fi $n \geq k \geq 0$. Este evident că x_n este $\mathcal{F}-$ măsurabilă pentru toţi $n \geq k \geq 0$.*

Observaţia 1.3.4. *Conform Propoziţiei 1.2.8 deducem că dacă ξ este o variabilă aleatoare cu valori in H care satisface condiţia $E\|\xi\| < \infty$ atunci avem $\langle E(\xi), u\rangle = E\langle \xi, u\rangle$ pentru toţi $u \in H$.*

Dacă $\xi \in L^2(\Omega, H)$, definim $E(\xi \otimes \xi) : H \to H$, $E(\xi \otimes \xi)(u) = E(\langle u, \xi \rangle \xi)$ pentru toţi $u \in H$.

Folosind proprietatea de liniaritate a produsului scalar este uşor de văzut că $E(\xi \otimes \xi)$ este un operator liniar. Deoarece $\|E(\xi \otimes \xi)(u)\| = \|E(\langle u, \xi \rangle \xi)\| \leq E \|\langle u, \xi \rangle \xi\| \leq \|u\| E \|\xi\|^2$ deducem că $E(\xi \otimes \xi)$ este mărginit.

Dacă $u, v \in H$, putem permuta produsul scalar cu media, conform observaţiei de mai sus, şi avem sucesiv $\langle E(\xi \otimes \xi)(u), v\rangle = \langle E(\langle u, \xi \rangle \xi), v\rangle$ $= E(\langle u, \xi \rangle \langle \xi, v\rangle) = \langle u, E(\xi \otimes \xi)(v)\rangle$. Astfel rezultă că $E(\xi \otimes \xi)$ este un operator autoadjunct.

Deoarece $\langle E(\xi \otimes \xi)(u), u\rangle = E\left(\langle u, \xi \rangle^2\right) \geq 0$, deducem că $E(\xi \otimes \xi)$ este nenegativ. Lema următoare este cunoscută .

Lema 1.3.5. *Fie V un alt spaţiu Hilbert real şi separabil şi $A \in L(H, V)$. Dacă ξ este o variabilă aleatoare cu valori in H astfel incât $E \|\xi\|^2 < \infty$ atunci $E \|A(\xi)\|^2 = \|AE(\xi \otimes \xi)A^*\|_1 < \infty$. În particular $E \|\xi\|^2 = \|E(\xi \otimes \xi)\|_1$.*

Demonstraţie. Fie $\{e_n\}_{n\in \mathbf{N}^*}$ o bază ortonormată in V. Atunci $E \|A(\xi)\|^2 = E \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle A(\xi), e_n\rangle^2$ şi folosind teorema convergenţei monotone şi Observaţia 1.3.4 avem

$$E \|A(\xi)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} E \langle A(\xi), e_n\rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} E \langle \langle \xi, A^*e_n\rangle \xi, A^*e_n\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(\xi \otimes \xi)A^*e_n, A^*e_n\rangle = TrAE(\xi \otimes \xi)A^*.$$ Cum $E(\xi \otimes \xi)$ este nenegativ, $AE(\xi\otimes\xi)A^*$ este nenegativ şi $E \|A(\xi)\|^2 = \|AE(\xi \otimes \xi)A^*\|_1 \leq \|A\|^2 E \|\xi\|^2 < \infty$. Am obţinut concluzia $\square$

Dacă $x_n \in L^2(\Omega, H)$ atunci deducem conform lemei de mai sus că $E(x_n \otimes x_n)$ este un operator nuclear, nenegativ şi

$$\|E(x_n \otimes x_n)\|_1 = E \|x_n\|^2 \tag{1.3.2}$$

4. Ecuaţii diferenţiale liniare stocastice in spaţii Hilbert

Rezultatele din această secţiune sunt cunoscute (eventual in formulări apropiate) dar unele din ele au fost prezentate cu demonstraţie pentru a uşura citirea lucrării.

4.1. Generatori de operatori de evoluţie in spaţii Hilbert. Fie H un spaţiu Hilbert real, separabil. Pentru fiecare interval $J \subset \mathbf{R}_+$ notăm cu $C_s(J, L(H))$ spaţiul tuturor funcţiilor $G(t) : J \subset \mathbf{R}_+ \to L(H)$ tare continue, adică spaţiul funcţiilor $G(t)x$ continue pe J pentru toţi $x \in H$ şi folosim notaţia $C_b(J, L(H))$ pentru subspaţiul lui $C_s(J, L(H))$, care constă din toate funcţiile $G(t)$ care au proprietatea $\sup\limits_{t \in J} \|G(t)\| < \infty$. Dacă E este un spaţiu Banach notăm cu $C(J, E)$ spaţiul tuturor funcţiilor $G(t) : J \subset \mathbf{R}_+ \to E$ care sunt continue. Introducem ipoteza următoare :

P_1: a) $A(t)$, $t \in [0, \infty)$ este un operator liniar, inchis, cu valori in H şi domeniul constant D, dens in H.

b) există $M > 0$, $\eta \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$ şi $\delta \in (-\infty, 0)$ astfel incât

$$S_{\delta,\eta} = \{\lambda \in C; |\arg(\lambda - \delta)| < \eta\} \subset \rho(A(t)),$$

oricare ar fi $t \geq 0$ şi

$$\|R(\lambda, A(t))\| \leq \frac{M}{|\lambda - \delta|},$$

oricare ar fi $\lambda \in S_{\delta,\eta}$.

c) există numerele $\alpha \in (0,1)$ şi $\widetilde{N} > 0$ astfel incât

$$\left\|A(t)A^{-1}(s) - I\right\| \leq \widetilde{N}\,|t-s|^{\alpha},$$

$t \geq s \geq 0$, unde am notat cu $\rho(A)$, $R(\lambda, A)$ mulţimea rezolventă a lui A şi respectiv rezolventa lui A.

Rezultatele de mai jos sunt cunoscute .

Propoziţia 1.4.1. *(*[**11**]*)Presupunem că are loc ipoteza P_1. Atunci există familia de operatori $U(t,s)$, $t \geq s \geq 0$ in $L(H)$ astfel incât*

a) $U(s,s) = I$, $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$, $t \geq r \geq s \geq 0$;

b) $U(.,.)x$ este continuu oricare ar fi $x \in H$;

c) Pentru toţi $t > s \geq 0$, $U(t,s)H \subset D$, $U(t,s)$ este diferenţiabilă in t şi

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)U(t,s).$$

$U(t,s)$ se numeşte operatorul de evoluţie relativ la .$A(t)$.

Propoziţia următoare este o consecinţă directă a teoremelor T.5.5.1 şi T.5.5.2 din [**55**]).

Propoziţia 1.4.2. *Fie E un spaţiu Banach şi $T > 0$ fixat. Pentru fiecare $0 \leq t \leq T$ fie $A(t)$ un operator liniar şi mărginit pe E. Dacă funcţia $t \to A(t)$ este continuă in topologia convergenţei uniforme atunci problema Cauchy*

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t), 0 \leq s < t \leq T,$$
$$u(s) = x$$

are o soluţie clasică unică u, pentru fiecare $x \in E$. Dacă notăm $U(t,s)x = u(t)$ pentru orice $0 \leq s \leq t \leq T$ atunci $U(t,s)$ este un operator liniar şi mărginit şi

a)$U(s,s) = I$, $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$, $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$;

b) $(t,s) \to U(t,s)$ este continuu in topologia convergenţei uniforme pentru orice $0 \leq s \leq t \leq T$;

c) $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)U(t,s),\ 0 \leq s \leq t \leq T;$

d) $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t,s)A(s)$ *for* $0 \leq s \leq t \leq T.$

Pentru fiecare $n \in N$ avem $n \in \rho(A(t))$. Operatorii $A_n(t) = n^2R(n,A(t)) - nI$ se numesc aproximările Yosida ale lui $A(t)$.

Lema 1.4.3. *(*[**22**]*)Dacă are loc* P_1 *atunci* $A_n \in C([0,\infty), L(H))$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$.

Demonstraţie. Fie $t, s \geq 0$. Avem

$$\|A_n(t) - A_n(s)\| = n^2\|R(n,A(t)) - R(n,A(s))\| \leq$$

$$\leq n^2\|R(n,A(t))(nI - A(t))(R(n,A(t)) - R(n,A(s)))\|$$

$$\leq n^2\|R(n,A(t))\|\,\|I - (nI - A(t))R(n,A(s))\|$$

$$\leq n^2\|R(n,A(t))\|\,\|I - [(nI - A(s)) + A(s) - A(t)]R(n,A(s))\|$$

$$\leq n^2\|R(n,A(t))\|\,\|I - [(nI - A(s)) + A(s) - A(t)]R(n,A(s))\|$$

$$\leq n^2\|R(n,A(t))\|\,\|I - I + [A(s) - A(t)]R(n,A(s))\|$$

$$\leq n^2\|R(n,A(t))\|\,\left\|[A(s) - A(t)]A(s)^{-1}A(s)R(n,A(s))\right\|$$

$$\leq n\|R(n,A(t))\|\,\left\|[A(s) - A(t)]A(s)^{-1}\right\|\,\|nA(s)R(n,A(s))\|.$$

Conform P_1(b) şi c)) deducem că există $\delta < 0$, $\alpha \in (0,1)$, $M > 0$ şi $\widetilde{N} > 0$ astfel incât $\|nA(s)R(n,A(s))\| = \|n^2R(n,A(s)) - nI\| \leq n^2\frac{M}{n-\delta} + n$ pentru orice $s \geq 0$ şi $\|A_n(t) - A_n(s)\| \leq n\frac{M}{n-\delta}(n^2\frac{M}{n-\delta} + n)\widetilde{N}\,|t-s|^\alpha$.

Demonstraţia este terminată. □

Dacă notăm cu $U_n(t,s)$ operatorul de evoluţie relativ la $A_n(t)$ (care există datorită lemei de mai sus şi Propozitiei 1.4.2 deoarece $A_n(t) \in C([0,\infty), L(H))$) atunci este cunoscut faptul că pentru fiecare $x \in H$, avem

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n(t,s)x = U(t,s)x$, unde convergenţa este uniformă pe orice submulţime mărginită a lui $\{(t,s); t \geq s \geq 0\}$ ([**11**]).

4.2. Ecuaţii diferenţiale liniare stocastice. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty), P)$ o bază stocastică. În cele ce urmează notăm $L_s^2(H) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P, H)$.

Considerăm ecuaţia diferenţială stocastică

$$dy(t) = A(t)y(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)y(t)dw_i(t) \tag{1.4.1}$$

$$y(s) = x \in L_s^2(H),$$

unde $A(t)$ satisface ipoteza P_1, $G_i \in C_s(J, L(H)), i = 1, ..., m$ şi w_i sunt procese Wiener reale in raport cu $\mathcal{F}_t$, independente (adică σ-algebrele $\sigma(w_1(t), t \geq 0), ..., \sigma(w_m(t), t \geq 0)$ sunt independente).

Definiţia 1.4.4. Spunem că un proces predictibil $y(t)$, $t \in [s, T]$ cu valori in H este *soluţie de evoluţie* a lui (1.4.1) cu condiţia iniţială $y(s) = x$, $x \in L_s^2(H)$ dacă şi numai dacă

a) $P(\int_s^t \|y(s)\|^2 ds < \infty) = 1$ şi pentru orice $t \in [s, T]$, avem

$$y(t) = U(t, s)x + \sum_{i=1}^{m} \int_s^t U(t, r)G_i(r)y(r)dw_i(r) \ \ P.a.s. \tag{1.4.2}$$

Definiţia 1.4.5. Un proces predictibil $y(t)$, $t \in [s, T]$ cu valori in H este *soluţie tare(clasică)* a ecuaţiei (1.4.1) cu condiţia iniţială $y(s) = x$, $x \in L_s^2(H)$ dacă şi numai dacă

a) $y(t) \in D(A), t \in [s, T]$

b) $P(\int_s^t \|A(s)y(s)\| ds < \infty) = 1$, $P(\int_s^t \|G_i(s)y(s)\|^2 ds < \infty) = 1, i = 1, ..., m$ şi pentru orice $t \in [s, T]$, avem

$$y(t) = x + \int_s^t A(s)y(s)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_s^t G_i(r)y(r)dw_i(r) \ \ P.a.s.$$

Se ştie ([**10**]) că (1.4.1) are o soluţie de evoluţie unică care aparţine lui $C([s, T]; L^2(\Omega; H))$ şi este adaptată la $\mathcal{F}_t$.

Asociem ecuaţiei (1.4.1) sistemul aproximant:

$$dy_n(t) = A_n(t)y_n(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)y_n(t)dw_i(t) \tag{1.4.3}$$

$$y_n(s) = x \in L_s^2(H),$$

unde $A_n(t)$ $, n \in \mathbf{N}$ sunt aproximările Yosida ale lui $A(t)$, iar $G_i(t)$ şi $w_i(t)$ sunt definiţi mai sus. Vom conveni să notăm cu $y(t,s;x)$ (resp. $y_n(t,s;x)$) soluţia de evoluţie (resp clasică (tare)) a ecuaţiei (1.4.1)(resp. (1.4.3)), dacă acestea există.

Se cunoaşte ([**11**]) lema de mai jos.

Lema 1.4.6. *Presupunem că este satisfăcută ipoteza P_1. Atunci există o soluţie de evoluţie unică (resp. clasică) a ecuaţiei (1.4.1) (resp. (1.4.3)) şi $y_n \to y$ in medie pătratică, uniform pe orice submulţime mărginită a lui $[s, \infty]$.*

Teorema următoare reaminteşte proprietăţile bine cunoscute ale soluţiei de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1).

Teorema 1.4.7. *Fie $y(t,s;x)$ soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1).*

*a) Dacă $x \in H$ atunci $y(t,s;x)$ este $\sigma\{w_i(r), s \le r \le t, i = 1,...,m\}$ adaptată ([**29**]), şi $\mathcal{F}_s$ independentă ([**12**]).*

b) Dacă x_1, $x_2 \in L_s^2(H)$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ atunci

$y(t,s;\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(t,s;x_1) + \alpha_1 y(t,s;x_1)$ P.a.s.

c) Dacă $B \in \mathcal{F}_s, x \in H$ şi χ_B este funcţia caracteristică a mulţimii B atunci

$y(t,s;\chi_B x) = \chi_B y(t,s;x)$ P.a.s.

Demonstraţie. a) Pentru prima parte a afirmaţiei se poate vedea ([**29**]) iar $\mathcal{F}_s$ -independenţa soluţiei de evoluţie rezultă din faptul că $y(t,s;x)$ este $\sigma\{w_i(r), s \le r \le t, i = 1,...,m\}$ adaptată, prin aplicarea punctului iii) din Definiţia 1.2.21.

b) Folosind (1.4.2) avem

$$y(t,s;\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 y(t,s;x_1) + \alpha_1 y(t,s;x_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_s^t U(t,r)G_i(r)[y(r,,s;\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) -$$
$$- \alpha_1 y(r,s;x_1) + \alpha_1 y(r,s;x_1)]dw_i(r).$$

Trecând la medie pătratică, folosind faptul că avem

$$\sup_{0 \le r \le t \le T} \|U(t,r)\| < \infty, \sup_{0 \le r \le T} \|G_i(r)\| < \infty,$$

(conform principiului mărginirii uniforme) şi aplicând lema lui Gronwall obţinem $E\|y(t,s;\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 y(t,s;x_1) + \alpha_1 y(t,s;x_1)\|^2 = 0$. Rezultă concluzia.

c) Folosind aceeaşi metodă ca cea de la punctul precedent avem $E\|y(t,s;\chi_B x) - \chi_B y(t,s;x)\|^2 = 0$ şi rezultă concluzia. □

Considerăm ecuaţia diferenţială stocastică

$$dz(t) = [A(t) + D(t)]z(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)z(t)dw_i(t) \tag{1.4.4}$$
$$z(s) = \xi,$$

unde $A(t)$ satisface ipoteza $P_1, G_i \in C_s(\mathbf{R}_+, L(H)), i = 1,...,m$, $D \in C_s(\mathbf{R}_+, L(H))$ şi w_i sunt procese Wiener reale independente in raport cu $\mathcal{F}_t$, $\xi \in L_s^2(H)$. Pentru orice $s,t \in \mathbf{R}_+$, $s \le t$, asociem ecuaţiei

(1.4.4) ecuaţia integrală :

(1.4.5)

$$z(t) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,r)D(r)z(r)dr + \sum_{i=1}^m \int_s^t U(t,r)G_i(r)z(r)dw_i(r)$$

Dacă $A_n(t)$, $n \in B$ sunt aproximările Yosida ale lui $A(t)$ atunci avem următoarea ecuaţie aproximantă a ecuaţiei (1.4.4)

$$dz_n(t) = [A_n(t) + D(t)]z_n(t)dt + \sum_{i=1}^m G_i(t)z_n(t)dw_i(t) \tag{1.4.6}$$

$$z_n(s) = \xi.$$

În continuare vom stabili faptul că dacă considerăm ecuaţia (1.4.4) pe intervalul $[s,T]$, $T \geq s > 0$, aceasta admite o soluţie de evoluţie unică in $C([s,T];L^2(\Omega;H))$.

Lema 1.4.8. [**68**]*(Se poate vedea* [**12**] *pentru cazul sistemelor autonome cu coeficienţi neliniari care satisfac condiţii de tip Lipschitz sau Teorema 2.3.1 din* [**24**].*) Ecuaţia (1.4.5) are o soluţie unică notată $z(t,s;x)$ care aparţine lui $C([s,T];L^2(\Omega;H))$ şi este adaptată la $\mathcal{F}_t$ iar ecuaţia (1.4.6) are o soluţie clasică unică z_n. Mai mult, $z_n \to z$ in medie pătratică uniform pe orice submulţime mărginită a lui $[s,\infty]$, $s \geq 0$. Soluţia unică a lui (1.4.5) se numeşte soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.4).*

Demonstraţie. Demonstraţia existenţei unei soluţii in $C([s,T];L^2(\Omega;H))$ adaptată la $\mathcal{F}_t$ este aceeaşi cu cea a Teoremei 2.3.1 din [**24**].

Pasul 1 Fie $Z = C([s,T];L^2(\Omega;H))$ şi $\mathcal{M}$ clasa tuturor proceselor progresiv măsurabile cu valori in H. $Z_1 = Z \cap \mathcal{M}$ este subspaţiu inchis al lui Z ([**24**]). Considerăm norma $\|.\|_Z$ pe Z dată de formula

$$\|y\|_Z = \sup_{t\in[s,T]} \{e^{-at}[E\,\|y(t)\|^2]^{1/2}$$

unde a este o constantă ce va fi precizată mai târziu. Fie K transformarea următoare

$$K(y)(t) = U(t,s)\xi + \int_s^t U(t,r)D(r)y(r)dr + \sum_{i=1}^m \int_s^t U(t,r)G_i(r)y(r)dw_i(r)$$

$$= U(t,s)\xi + K_1(y)(t) + K_2(y)(t)$$

pentru toţi $t \in [s,T]$, $y \in Z_1$.

Deoarece compunerea de funcţii continue cu funcţii măsurabile este măsurabilă atunci $K(y) \in \mathcal{M}$ şi este suficient să arătăm că $K(y) \in Z$, pentru a demonstra că funcţia K transformă Z_1 in Z_1. Avem

$$\|K_1(y)\|_Z^2 = \sup_{t\in[s,T]} e^{-at} E \left\| \int_s^t U(t,r)D(r)z(r)dr \right\|^2 \leq$$

$$\leq M_T^2 \widetilde{D}^2 \sup_{t\in[s,T]} \int_s^t e^{-a(t-r)} \sup_{r\in[s,T]} e^{-ar} E \|z(r)\|^2 dr \leq M_{\widehat{T}}^2 \widetilde{D}^2 \|z(r)\|_Z^2 a^{-1},$$

unde $M_T = \sup\limits_{0\leq r\leq t\leq T} \|U(t,r)\|$ (M_T există conform Propoziţiei 1.4.1 şi principiului mărginirii uniforme) şi $\widetilde{D} = \sup\limits_{0\leq r\leq T} \|D(r)\|$.

Deci $\|K_1(y)\|_Z \leq M_T \widetilde{D} \|z(r)\|_Z a^{-1/2}$. Raţionând exact in acelaşi mod, rezultă că există o constantă R_2 astfel incât $\|K_2(y)\|_Z \leq R_2 \|z(r)\|_Z a^{-1/2}$. Astfel $\|K(y)\|_Z^2 < \infty$. Pentru a demonstra că avem $K(y) \in Z$ este suficient să arătăm că $\lim\limits_{t\to t_0} E \|K(y)(t) - K(y)(t_0)\|^2 = 0$. Avem

$$\lim_{t\to t_0} E \|K(y)(t) - K(y)(t_0)\|^2 \leq 3[\lim_{t\to t_0} E \|U(t,s)\xi - U(t_0,s)\xi\|^2 +$$

$$+\lim_{t\to t_0}(E \|K_1(y)(t) - K_1(y)(t_0)\|^2 + E \|K_2(y)(t) - K_2(y)(t_0)\|^2)].$$

Este clar că $\lim\limits_{t\to t_0} E \|U(t,s)\xi - U(t_0,s)\xi\|^2 = 0$ (conform Propoziţiei 1.4.1 b).). Vom demonstra doar că $\lim\limits_{t\to t_0} E \|K_1(y)(t) - K_1(y)(t_0)\|^2 = 0$

pentru cealaltă limită demonstraţia fiind asemănătoare. Dacă $T > t > t_0 \geq s$ atunci

$$E\,\|K_1(y)(t) - K_1(y)(t_0)\|^2 \leq$$

$$\leq \int_s^{t_0} E\,\|[U(t,r) - U(t_0,r)]D(r)z(r)\|^2\,dr + \int_{t_0}^{t} E\,\|U(t,r)D(r)z(r)\|^2\,dr.$$

Datorită proprietăţii b) din Propoziţia 1.4.1, este uşor de văzut că $\lim\limits_{t\to t_0} E\,\|K_1(y)(t) - K_1(y)(t_0)\|^2 = 0$. Dacă $t \leq t_0 < T$ atunci

$$E\,\|K_1(y)(t) - K_1(y)(t_0)\|^2 \leq \int_s^{t} E\,\|[U(t,r) - U(t_0,r)]D(r)z(r)\|^2\,dr$$

$$+ \int_t^{t_0} E\,\|U(t_0,r)D(r)z(r)\|^2\,dr$$

Deoarece prima integrală este cu parametru (t) şi funcţia de integrat este continuă pe mulţimea compactă $\{(t,r), 0 \leq r \leq t \leq t_0\}$ iar a doua integrală este funcţie continuă in t, deducem că şi in acest caz limita este zero.

Făcând un calcul asemănător celui folosit pentru a demonstra faptul că $\|K(y)\|_Z^2 < \infty$ putem deduce că există o constantă M care depinde de $M_T, \widetilde{G}_i, \widetilde{D}$ şi T astfel incât $\|K(y) - K(z)\|_Z \leq Ma^{-1/2}\,\|y - z\|_Z^2$. Alegând a astfel incât $Ma^{-1/2} < 1$ deducem că transformarea K este o contracţie şi deci are un punct fix unic z. Astfel, am demonstrat că ecuaţia *(1.4.5)* are o soluţie unică (până la o modificare) in Z_1. Conform Observaţiei 1.2.20 rezultă că z este şi proces predictibil.

Deoarece coeficienţii ecuaţiei aproximante *(1.4.6)* satisfac toate ipotezele de care am avut nevoie in demonstraţia de mai sus deducem că aceasta are o soluţie unică $z_n(t,s;x)$ care aparţine lui $C([s,T];L^2(\Omega;H))$ şi este adaptată la $\mathcal{F}_t$.

În continuare vom demonstra că această soluţie de evoluţie este şi soluţie in sens clasic. Avem

$$\int_s^t A_n(r)z_n(r)dr = \int_s^t \frac{\partial U_n(r,s)}{\partial r}xdr + \int_s^t\int_s^r \frac{\partial U_n(r,p)}{\partial r}D(p)z_n(p)dpdr +$$

$$+\sum_{i=1}^m \int_s^t\int_s^r \frac{\partial U_n(r,p)}{\partial r}G_i(p)z_n(p)dw_i(p)dr$$

Folosind teorema lui Fubini şi teorema stocastică a lui Fubini (Teorema 1.2.29) obţinem

$$\int_s^t A_n(r)z_n(r)dr = U_n(t,s)x - x + \int_s^t U_n(t,p)D(p)z_n(p)dp - \int_s^t D(p)z_n(p)dp+$$

$$+\sum_{i=1}^m \int_s^t U_n(t,p)G_i(p)z_n(p)dw_i(p) - \sum_{i=1}^m \int_s^t G_i(p)z_n(p)dw_i(p) =$$

$$= z_n(t) - x - \int_s^t D(p)z_n(p)dp - \sum_{i=1}^m \int_s^t G_i(p)z_n(p)dw_i(p)$$

şi rezultă concluzia.

Pasul 2. În cele ce urmează vom demonstra că $z_n(t)$ converge la $z(t)$ in medie pătratică, uniform in raport cu t pe $[s,T]$.

$$(1.4.7) \qquad E\left\|z_n(t) - z(t)\right\|^2 \leq (2m+3)\{\|U_n(t,s)x - U(t,s)x\|^2 +$$

$$+\int_s^t E\left\|U_n(t,r)D(r)[z_n(r)-z(r)]\right\|^2 dr +$$

$$+\int_s^t E\left\|[U_n(t,r)-U(t,r)]D(r)z(r)\right\|^2 dr +$$

$$+\sum_{i=1}^m \int_s^t E\left\|U_n(t,r)G_i(r)[z_n(r)-z(r)]\right\|^2 dr +$$

$$+\sum_{i=1}^m \int_s^t E\left\|[U_n(t,r)-U(t,r)]G_i(r)z(r)\right\|^2 dr\}$$

$$= (2m+3)\{\|U_n(t,s)x-U(t,s)x\|^2 + I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n} + I_{4,n}\}$$

Deoarece $U_n(t,r)x - U(t,r)x \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pentru oricare $x \in H$ uniform pe $\{(t,r), T \geq t \geq r \geq 0\}$, putem aplica principiul mărginirii uniforme şi deducem că există $\widetilde{M_T} > 0$ astfel că $\|U_n(t,r) - U(t,r)\| \leq \widetilde{M_T}$ oricare ar fi $0 \leq r \leq t \leq T$ şi $n \in \mathbf{N}$. Dacă $\sup\limits_{0\leq r\leq t\leq T} \|U(t,r)\| \leq M_T$, $\sup\limits_{r\in[0,T]} \|G_i\| = \widetilde{G}_i$ $i = 1, ..., m$ şi $\widetilde{D}$ este definit ca mai sus atunci este clar că

$$I_{1,n} \leq \left(\widetilde{M_T} + M_T\right)^2 \widetilde{D}^2 \int_s^t E\|z_n(r)-z(r)\|^2 dr$$

şi

$$I_{3,n} \leq \left(\widetilde{M_T} + M_T\right)^2 \sum_{i=1}^m \widetilde{G}_i^2 \int_s^t E\|z_n(r)-z(r)\|^2 dr.$$

În continuare vom demonstra că $I_{2,n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ uniform in raport cu t. Exact in acelaşi mod se poate demonstra că $I_{4,n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ uniform in raport cu t. Este uşor de verificat că $\phi : [s,T] \to L^2(\Omega, H)$, $\phi(r) = D(r)z(r)$ este o aplicaţie continuă. Atunci $\phi([s,T]) = \Delta$ este o mulţime compactă din $L^2(\Omega, H)$. Fie $r \in [0,T]$ fixat . Voi demonstra că $\alpha_n(r) =$

$\sup_{(t,\xi)\in[r,T]\times\Delta} E\left\|[U_n(t,r)-U(t,r)]\xi\right\|^2$ este finit şi $\alpha_n(r) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Nu este dificil de arătat că aplicaţia $(t,\xi) \to E\left\|[U_n(t,r)-U(t,r)]\xi\right\|^2$ este continuă pe $[r,T]\times\Delta$ pentru fiecare $n\in\mathbf{N}$. Într-adevăr, dacă $(t,\xi)\to(t_0,\xi_0)$ atunci avem

$$E\left\|[U_n(t,r)-U(t,r)]\xi-[U_n(t_0,r_0)-U(t_0,r_0)]\xi_0\right\|^2 \leq$$

$$\leq 4\{E\left\|U_n(t,r)(\xi-\xi_0)\right\|^2+E\left\|[U_n(t,r)-U_n(t_0,r)]\xi_0\right\|^2+$$

$$+E\left\|U(t,r)(\xi-\xi_0)\right\|^2+E\left\|[U(t,r)-U(t_0,r)]\xi_0\right\|^2=$$

$$=T_{n,1}+T_{n,2}+T_{n,3}+T_{n,4.}$$

$T_{n,1},T_{n,3} \underset{(t,\xi)\to(t_0,\xi_0)}{\to} 0$ deoarece $\|U_n(t,r)\|\leq M_T+M_{\widetilde{T}}$ respectiv $\|U(t,r)\|\leq M_T$ oricare ar fi $0\leq r\leq t\leq T$ şi $\xi\to\xi_0$,

$T_{n,2} \underset{(t,\xi)\to(t_0,\xi_0)}{\to} 0$ deoarece $\|U_n(t,r)-U_n(t_0,r)\| \underset{t\to t_0}{\to} 0$ iar

$T_{n,4} \underset{(t,\xi)\to(t_0,\xi_0)}{\to} 0$ deoarece $(t,r)\to U(t,r)$ este tare continuu şi pentru fiecare $\omega\in\Omega$ avem

$$\left\|[U(t,r)-U(t_0,r)]\xi_0\,(\omega)\right\|^2 \underset{(t,\xi)\to(t_0,\xi_0)}{\to} 0$$

iar

$$\left\|[U(t,r)-U(t_0,r)]\xi_0\,(\omega)\right\|^2 \leq 2M_T\left\|\xi_0(\omega)\right\|^2.$$

Acum este clar că $\sup_{(t,\xi)\in[r,T]\times\Delta} E\left\|[U_n(t,r)-U(t,r)]\xi\right\|^2$ este finit şi este atins intr-un punct $(t_{n,r},\xi_{n,r})$. Deoarece r este fixat, convenim să notăm punctul de mai sus (t_n,ξ_n). Deci $\alpha_n(r)=E\left\|[U_n(t_n,r)-U(t_n,r)]\xi_n\right\|^2$. Presupunem prin absurd că $\alpha_n(r) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$. Fie $\delta>0$. Atunci există un subşir al lui $\alpha_n(r)$ astfel incât $\alpha_n(r)\geq\delta$. Cum $t_n\in[0,T]$, $\xi_n\in\Delta$ ($[0,T],\Delta$ sunt mulţimi compacte) atunci acestea admit subşiruri convergente. Fie un subşir al subşirului lui $\alpha_n(r)$, ales mai sus, astfel incât

t_n şi respectiv ξ_n să fie convergente. Pentru a nu complica notaţiile, vom nota acest subşir tot α_n. Avem

$$\lim_{n\to\infty} E\left\|[U_n(t_n,r)-U(t_n,r)]\xi_n\right\|^2 \leq 5\lim_{n\to\infty}\{E\left\|U_n(t_n,r)(\xi_n-\xi)\right\|^2+$$
$$+E\left\|[U_n(t_n,r)-U(t_n,r)]\xi\right\|^2+2E\left\|[U(t_n,r)-U(t,r)]\xi\right\|^2+$$
$$+E\left\|U(t_n,r)(\xi_n-\xi)\right\|^2)\} = 5\lim_{n\to\infty}\{V_{n,1}+V_{n,2}+2V_{n,3}+V_{n,4}\}.$$

Deoarece $\|U_n(t,r)\| \leq M_T + \widetilde{M_T}$, $\|U(t,r)\| \leq M_T$ oricare ar fi $0 \leq r \leq t \leq T$, $n \in \mathbf{N}$ şi $\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi_0$ deducem că $V_{n,1}, V_{n,4} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Putem demonstra că $V_{n,3} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, datorită faptului că pentru fiecare $\omega \in \Omega$, $\|U_n(t,r)-U(t,r)]\xi(\omega)\|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ uniform pe $0 \leq r \leq t \leq T$ deci, in particular, şi pentru (t_n, r) iar

$$\left\|[U_n(t_n,r)-U(t_n,r)]\xi\left(\omega\right)\right\|^2 \leq 2\widetilde{M_T}\left\|\xi(\omega)\right\|^2$$

În final $V_{n,3} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ din aceleaşi motive ca şi $T_{n,4}$. Astfel, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n(r) = 0 \geq \delta$ şi am obţinut o contradicţie. Deci, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n(r) = 0$. Fie acum funcţia $\Phi_n(t,r,\xi) : [s,T]\times[s,T]\times\Delta \to \mathbf{R}_+$,

$$\Phi_n(t,r,\xi) = E\left\|[U_n(t,r)-U(t,r)]\xi\right\|^2 \chi_{\{(t,r),s\leq r\leq t\leq T\}}(t,r).$$

Este clar că pentru r fixat $(t,\xi) \to \Phi_n(t,r,\xi)$ este continuă pe $[s,T] \times \Delta$ şi pentru t, ξ fixaţi $r \to \Phi_n(t,r,\xi)$ este continuă pe $[s,T]$ deci, măsurabilă Borel.

Cum, $\sup\limits_{(t,\xi)\in[s,T]\times\Delta}\Phi_n(t,r,\xi) \leq \alpha_n(r)$ iar $\sup\limits_{(t,\xi)\in[s,T]\times\Delta}\Phi_n(t,r,\xi)$ este o funcţie măsurabilă, căci $[s,T]\times\Delta$ este separabil (orice compact metrizabil este separabil) atunci

$I_{2,n} = \int\limits_s^T \Phi_n(t,r,\xi)dr \leq \int\limits_s^T \sup\limits_{(t,\xi)\in[s,T]\times\Delta}\Phi_n(t,r,\xi)dr \underset{n\to\infty}{\to} 0$, conform teoremei convergenţei mărginite. (Am folosit faptul că $\Phi_n(t,r,\xi) \leq \widetilde{M_T}\sup\limits_{\xi\in\Delta} E\left\|\xi\right\|^2 < \infty$).

Acum este clar că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel incât $\left\|U_n(t,s)x - U(t,s)x\right\|^2 + I_{2,n} + I_{4,n} < \varepsilon$ pentru toţi $n \geq n_0$.

Din relaţia (1.4.7), deducem că $E\left\|z_n(t)-z(t)\right\|^2 \leq (2m+3)\{\varepsilon+$ $\left(\widetilde{M}_T+M_T\right)^2\left[\widetilde{D}^2+\sum\limits_{i=1}^m \widetilde{G}_i^2\right]\int\limits_s^t E\left\|z_n(r)-z(r)\right\|^2 dr\}.$
Concluzia rezultă aplicând inegalitatea lui Gronwall. □

În continuare vom prezenta un rezultat util in demonstraţiile din celelalte capitole. Introducem ipoteza următoare:

P_2 : Operatorul $U(t,s)$ este cu creştere exponenţială, adică există M_0 şi ω constante reale, pozitive astfel incât

$$\|U(t,s)\| \leq M_0 e^{\omega(t-s)}$$

oricare ar fi $t \geq s \geq 0$.

Lema 1.4.9. *Presupunem că operatorul de evoluţie $U(t,s)$ relativ la $A(t)$ satisface ipoteza P_2. Dacă $y(t,s;x)$ şi $z(t,s;x)$ sunt soluţiile de evoluţie ale ecuaţiilor (1.4.1) şi respectiv (1.4.4) atunci există funcţiile continue şi monoton crescătoare f ,$\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ astfel că*

a) $E\left\|y(t,s;\xi)\right\|^2 \leq f(t-s)E\left\|\xi\right\|^2$ *şi*

b) $E\left\|z(t,s;\xi)\right\|^2 \leq \phi(t-s)\left\|\xi\right\|^2$ *pentru toţi* $\xi \in L_s^2(H)$ *şi* $0 \leq s \leq t$.

Demonstraţie. a) Trecem la media pătratică in (1.4.2) şi avem succesiv

$$E\left\|y(t,s;\xi)\right\|^2 \leq (m+1)(E\left\|U(t,s)\xi\right\|^2+\sum_{i=1}^m\int_s^t M_0^2 e^{2\omega(t-r)}\widetilde{G}_i^2 E\left\|y(r,s;\xi)\right\|^2 dr,$$

$$E\left\|y(t,s;\xi)\right\|^2 \leq (m+1)M_0^2(e^{2\omega(t-s)}E\left\|\xi\right\|^2+\sum_{i=1}^m \widetilde{G}_i^2\int_s^t e^{2\omega(t-r)}E\left\|y(r,s;\xi)\right\|^2 dr).$$

Astfel, $e^{-2\omega(t-s)}E\left\|y(t,s;\xi)\right\|^2 \leq (m+1)(M_0^2 E\left\|\xi\right\|^2 +$

$$M_0^2\sum_{i=1}^m \widetilde{G}_i^2\int_s^t e^{-2\omega(r-s)}E\left\|y(r,s;\xi)\right\|^2 dr).$$

Aplicăm inegalitatea lui Gronwall şi obţinem

$$E\left\|y(t,s;\xi)\right\|^2 \leq (m+1)M_0^2 e^{2\omega(t-s)}E\left\|\xi\right\|^2 \exp((m+1)M_0^2\sum_{i=1}^m \widetilde{G}_i^2(t-s)).$$

Definim $f(t) = (m+1)(M_0^2 e^{2\omega t} \exp(t(m+1)M_0^2 \sum_{i=1}^{m} \widetilde{G}_i^2)$ şi obţinem concluzia. b) Deoarece $D(t)$ este mărginit pe $\mathbf{R}_+$ putem raţiona ca mai sus şi obţinem b). $\square$

5. Comentarii bibliografice

În acest capitol au fost prezentate noţiuni fundamentale legate de teoria operatorilor nucleari şi Hilbert-Schmidt ([**1**], [**23**], [**24**], [**21**]), de variabile aleatoare cu valori in spaţii Hilbert şi integrala stocastică ([**12**], [**6**], [**13**], [**17**], [**19**] ,[**8**], [**30**]). Au fost introduse cele două tipuri de ecuaţii liniare stocastice (ecuaţii diferenţiale şi discrete) şi au fost prezentate rezultate care stabilesc anumite proprietăţi ale soluţiilor ([**12**], [**8**], [**11**], [**30**], [**77**], [**76**], [**50**], [**52**]). Unele rezultate au fost prezentate cu demonstraţii. Astfel, a fost demnostrată Lema 1.3.1 care stabileşte proprietăţile operatorului stocastic de evoluţie asociat sistemului discret 1.3.1 şi Lema 1.4.8, care ne asigură că ecuaţia liniară stocastică (1.4.4), in care coeficientul părţii deterministe este perturbat cu un operator din $C_b(\mathbf{R}_+, L(H))$, admite o soluţie de evoluţie unică, care este limita uniformă a soluţiilor tari ale sistemului aproximant (1.4.6). Un rezultat asemănător, in care nu apare perturbaţia coeficientului părţii deterministe, este Lema 1.4.6 iar, in ceea ce priveşte partea de existenţă a soluţiei de evoluţie, un rezultat mai general este Teorema 2.3.1 din [**24**].

CAPITOLUL 2

COMPORTĂRI ASIMPTOTICE ALE SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE DISCRETE PERTURBATE CU VARIABILE ALEATOARE INDEPENDENTE

1. Introducere

În acest capitol sunt considerate ecuaţii liniare discrete perturbate cu variabile aleatoare independente. Coeficienţii ecuaţiilor sunt operatori liniari dependenţi de timp care acţionează pe spaţii Hilbert infinit dimensionale. În **al doilea paragraf** al acestui capitol sunt date teoreme de reprezentare a mediei pătratice a soluţiei ecuaţiei (2.2.1). Astfel, a fost obţinută o reprezentare originală a mediei pătratice a soluţiei ecuaţiei (2.2.1), reprezentare care foloseşte operatorul de evoluţie asociat sistemului determinist (2.2.2) şi conduce la stabilirea relaţiei (2.2.4). Este prezentată şi o a doua reprezentare care este deja cunoscută in cazul finit dimensional ([**49**]) şi este demonstrată Teorema 2.2.5 care stabileşte legătura ce există intre cele două reprezentări.

Paragraful al treilea tratează problema stabilităţii şi instabilităţii exponenţiale precum şi problema stabilităţii exponenţiale uniforme a sistemelor precizate mai sus. Reprezentările obţinute in paragraful precedent conduc la obţinerea unor condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială şi stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor discutate. În acest context se observă că unul din avantajele primei reprezentări il constitue faptul că toate rezultatele obţinute cu ajutorul acesteia pot fi obţinute cu uşurinţă şi in cazul spaţiilor Hilbert complexe. Folosind prima teoremă de reprezentare (Teorema 2.2.4) a mediei soluţiei ecuaţiei (1.3.1), am obţinut caracterizări deterministe ale stabilităţii şi instabilităţii exponenţiale care generalizează rezultate din [**77**] şi [**43**]. Tot in cadrul acestui paragraf au fost date caracterizări ale stabilităţii exponenţiale uniforme cu ajutorul ecuaţiilor Lyapunov (pentru cazul determinist un rezultat similar este demonstrat in [**43**]).

În **paragraful al patrulea** a fost considerat cazul sistemelor invariante in timp, caz in care s-au stabilit o serie de caracterizări ale stabilităţii exponenţiale uniforme precum şi faptul că aceasta este echivalentă cu stabilitatea exponenţială. Corolarul 2.4.2 stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru a avea stabilitate exponenţială folosind ecuaţii Lyapunov algebrice. În **paragraful** următor este introdusă noţiunea de observabilitate uniformă Tot aici a fost obţinută o caracterizare deterministă a conceptului de observabilitate uniformă şi au fost date condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor liniare stocastice discrete uniform observabile, utilizând ecuaţiile Lyapunov. În **penultimul paragraf** al acestui capitol sunt considerate sisteme liniare discrete cu control, perturbate stocastic. Problema controlului liniar pătratic al sistemelor discutate a impus asocierea unei ecuaţii discrete Riccati şi studierea soluţiilor acesteia. Astfel, s-a demonstrat, prin analogie cu cazul finit dimensional

([**50**]), că, in condiţii de stabilizabilitate a sistemului cu control şi uniform observabilitate a sistemului liniar discret stocastic supus controlului, ecuaţia Riccati (2.6.4) are o soluţie uniform pozitivă şi mărginită pe N (Teorema 2.6.9) care este stabilizantă pentru sistemul cu control. Ca o consecinţă a acestui rezultat este obţinut controlul feedback care minimizează costul (2.6.3) asociat sistemului cu control (2.6.1). În sfârşit, in **ultimul paragraf** al acestui capitol este tratată problema dihotomiei exponenţiale a sistemelor liniare stocastice discrete. Caracterizările stabilităţii şi respectiv instabilităţii exponenţiale obţinute in paragraful al treilea au permis obţinerea unor condiţii necesare şi suficiente pentru dihotomia exponenţială (Teorema 2.7.3). Tot in acest paragraf este dată şi o condiţie suficientă (Propoziţia 2.7.5) pentru dihotomia exponenţială, care reduce problema dihotomiei exponenţiale pentru sisteme stocastice la problema similară pentru sisteme deterministe. (Pentru cazul determinist avem caracterizări ale dihotomiei stabilite de M.Megan şi P.Preda in [**44**] şi [**45**]).

2. Reprezentări ale soluţiilor sistemelor de ecuaţii liniare stocastice discrete

În acest paragraf vom da două reprezentări ale soluţiilor acestor sisteme şi vom stabili o relaţie intre acestea. Aceste reprezentări sunt foarte importante in sensul obţinerii unor caracterizări deterministe ale celor două tipuri de stabilitate. Prima din aceste reprezentări ale soluţiilor (Teorema 2.2.1) permite reducerea problemelor de stabilitate din cazul stocastic la probleme similare pentru sisteme deterministe. Astfel se pot obţine caracterizări ale stabilităţii exponenţiale uniforme pentru sistemele stocastice ca şi consecinţe ale rezultatelor obţinute in [**43**] pentru sisteme deterministe. Cealaltă reprezentare (a se vedea Teorema 2.2.4) conduce la obţinerea unor rezultate similare celor obţinute in [**49**] (a se vedea Teorema 2.3.7, punctul c)) pentru cazul sistemelor liniare discrete perturbate cu procese Markov, considerate pe spaţii finit dimensionale. Teorema 2.2.5 stabileşte legătura care există intre aceste două reprezentări.

2.1. Teoreme de reprezentare a soluţiilor ecuaţiilor liniare stocastice discrete in spaţii Hilbert infinit dimensionale. Fie H un spaţiu Hilbert real, separabil. Fie $C_1(H)$ mulţimea operatorilor nucleari (sau trace class) introdusă in capitolul 1. Notăm cu $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{N}$ subspaţiile lui $L(H)$ şi $C_1(H)$ formate din toţi operatorii autoadjuncţi. $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{N}$ sunt spaţii (pentru $\mathcal{N}$ se pot vedea consideraţiile făcute in capitolul 1) Banach.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un spaţiu de probabilitate. Considerăm sistemul stocastic

$$x_{n+1} = A_n x_n + \xi_n B_n x_n \ , \qquad (2.2.1)$$
$$x_k = x, x \in H$$

unde $A_n, B_n \in L(H)$, ξ_n sunt variabile aleatoare reale independente care satisfac condiţiile $E(\xi_n) = 0$ şi $E\left|\xi_n\right|^2 = b_n < \infty$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$.

Dacă $x_n = x_n(k,x)$ este soluţia sistemului (2.2.1)(ştim că este unică) iar $X(n,k)$, $n \geq k \geq 0$ este operatorul de evoluţie aleator asociat sistemului liniar (2.2.1) atunci $x_n(k,x) = X(n,k)x$.

Conform celor stabilite in paragraful 3 al capitolului 1, $x_n(k,x)$ este o variabilă aleatoare şi $x_n \in L^2(\Omega, H) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P, H)$ pentru toţi n $\in \mathbf{N}$, $n \geq k$.

Considerăm $\overline{A}_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $\overline{A}_n(Y) = A_n Y A_n^*$. Dacă $Y \in \mathcal{N}$, se vede că $\overline{A}_n(Y) \in \mathcal{N}$ deoarece $A_n Y A_n^* \in C_1(H)$ (conform Teoremei 1.1.2) şi $A_n Y A_n^* \in \mathcal{E}$.

Este uşor de verificat că $\overline{A}_n$ este liniar şi deoarece $\left\|\overline{A}_n(Y)\right\|_1 \leq \|A_n\|^2 \|Y\|_1$ se deduce că este şi mărginit. Astfel, $\overline{A}_n \in L(\mathcal{N})$. În mod analog , deducem că $\overline{B}_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $\overline{B}_n(Y) = B_n Y B_n^*$ este un element a lui $L(\mathcal{N})$. Asociem sistemului (2.2.1) sistemul determinist definit pe $\mathcal{N}$:

$$y_{n+1} = \overline{A}_n y_n + b_n \overline{B}_n y_n \ , \qquad (2.2.2)$$

$$y_k = x \otimes x$$

unde, $n \in \mathbf{N}$ şi $\overline{A}_n$, $\overline{B}_n$ sunt operatorii liniari definiţi mai sus.

Deoarece $\overline{A}_n, \overline{B}_n \in L(\mathcal{N})$ şi $b_n \in \mathbf{R}_+$ atunci definim operatorul liniar şi mărginit

$$U_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N}, U_n(Y) = \overline{A}_n(Y) + b_n \overline{B}_n(Y). \qquad (2.2.3)$$

Dacă $Y(n,k)$ este operatorul de evoluţie asociat sistemului (2.2.2) atunci $Y(n,k) = U_{n-1}U_{n-2}...U_k$ dacă $n-1 \geq k$ şi $Y(k,k) = I$, unde I este operatorul identic pe $\mathcal{N}$.

Notăm cu $y_n = y_n(k,R)$ soluţia lui (2.2.2) cu condiţia iniţială $y_k = R \in \mathcal{N}$; este clar că aceasta este unică şi $y_n(k,R) = Y(n,k)(R)$ pentru toţi $n, k \in \mathbf{N}, n \geq k, R \in \mathcal{N}$.

Teorema 2.2.1. *([**66**]) Dacă $x_n = x_n(k,x)$ este soluţia lui (2.2.1) atunci $E(x_n \otimes x_n)$ este soluţia unică a sistemului (2.2.2).*

Demonstraţie. Fie $x_n = x_n(k,x)$ soluţia sistemului (2.2.1). Am stabilit faptul că $x_n \in L^2(\Omega, H)$ şi x_n, ξ_n sunt variabile aleatoare independente pentru toţi $n \geq k \geq 0$. De aici avem :

$$\langle E(x_n \otimes x_n)u, v\rangle = E\left(\langle u, x_n\rangle \langle x_n, v\rangle\right) =$$

$$= E\left(\langle u, A_{n-1}x_{n-1} + \xi_{n-1}B_{n-1}x_{n-1}\rangle \langle A_{n-1}x_{n-1} + \xi_{n-1}B_{n-1}x_{n-1}, v\rangle\right) =$$

$$= E(\langle u, A_{n-1}x_{n-1}\rangle \langle A_{n-1}x_{n-1}, v\rangle + \xi_{n-1}\langle u, A_{n-1}x_{n-1}\rangle \langle B_{n-1}x_{n-1}, v\rangle +$$

$$+ \xi_{n-1}\langle u, B_{n-1}x_{n-1}\rangle \langle A_{n-1}x_{n-1}, v\rangle + \xi_{n-1}^2 \langle u, B_{n-1}x_{n-1}\rangle \langle B_{n-1}x_{n-1}, v\rangle .$$

Datorită independenţei variabilelor aleatoare x_{n-1}, ξ_{n-1} şi ipotezei ($E(\xi_n) = 0$ şi $E\left|\xi_n\right|^2 = b_n$) obţinem :

$$\langle E(x_n \otimes x_n)u, k\rangle = E(\langle u, A_{n-1}x_{n-1}\rangle \langle A_{n-1}x_{n-1}, v\rangle)+$$

$$+ b_{n-1}E(\langle u, B_{n-1}x_{n-1}\rangle \langle B_{n-1}x_{n-1}, v\rangle) =$$

$$= E(\left\langle A_{n-1}^* u, x_{n-1}\right\rangle \left\langle x_{n-1}, A_{n-1}^* v\right\rangle + b_{n-1}\left\langle B_{n-1}^* u, x_{n-1}\right\rangle \left\langle x_{n-1}, B_{n-1}^* v\right\rangle) =$$

$$= E(\left\langle x_{n-1} \otimes x_{n-1}A_{n-1}^* u, A_{n-1}^* v\right\rangle + b_{n-1}\left\langle x_{n-1} \otimes x_{n-1}B_{n-1}^* u, B_{n-1}^* v\right\rangle) =$$

$$= \left\langle (\overline{A}_{n-1}E(x_{n-1} \otimes x_{n-1}) + b_{n-1}\overline{B}_{n-1}E(x_{n-1} \otimes x_{n-1}))(u), v\right\rangle$$

pentru toţi $u, v \in H$. Pentru a obţine ultima egalitate am folosit posibilitatea de a permuta produsul scalar cu media . Astfel avem $E(x_n \otimes x_n) = \overline{A}_{n-1}E(x_{n-1} \otimes x_{n-1}) + b_{n-1}\overline{B}_{n-1}E(x_{n-1} \otimes x_{n-1})$ şi $E(x_k \otimes x_k) = x \otimes x$. Din unicitatea soluţiei ecuaţiei (2.2.2) cu condiţia iniţială $y_k = x \otimes x$, rezultă concluzia. $\square$

Conform propoziţiei de mai sus avem $E(x_n \otimes x_n) = Y(n,k)(x \otimes x)$. Deoarece, $U_n \in L(\mathcal{N})$ nu este dificil de văzut că $Y(n,k) \in L(\mathcal{N})$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$. Conform celor stabilite mai sus şi aplicând (1.3.2) rezultă

$$E\|X(n,k)x\|^2 = E\|x(n,k;x)\|^2 =$$
$$= \|E(x(n,k;x) \otimes x(n,k;x))\|_1 = \|Y(n,k)(x \otimes x)\|_1 .$$

Astfel am stabilit relaţia

$$E\|X(n,k)x\|^2 = \|Y(n,k)(x \otimes x)\|_1 \tag{2.2.4}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$. Fie $\mathcal{K}$ (respectiv $\mathcal{K}_1$) conul tuturor operatorilor nenegativi din $\mathcal{E}$ (şi respectiv $\mathcal{N}$) Lema următoare este cunoscută (a se vedea [**75**]) dar o vom prezenta totuşi cu demonstraţie.

Lema 2.2.2. *Fie $T \in L(\mathcal{E})$. Dacă $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ atunci $\|T\| = \|T(I)\|$, unde I este operatorul identic pe H.*

Demonstraţie. Este evident că are loc relaţia $\|T(I)\| \leq \|T\|$ şi astfel vom demonstra numai reciproca. Fie $S \in \mathcal{E}$ astfel incât $\|S\| \leq 1$. atunci $\|S\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Sx, x\rangle|$ şi $-I \leq S \leq I$. Deoarece $-T(I) \leq T(S) \leq T(I)$, avem $|\langle T(S)x, x\rangle| \leq \langle T(I)x, x\rangle$ pentru toţi $x \in H$. Astfel $\|T(S)\| \leq \|T(I)\|$ pentru toţi $S \in \mathcal{E}$ astfel incât $\|S\| \leq 1$ şi deducem că $\|T\| \leq \|T(I)\|$. □

Observaţia 2.2.3. *Este uşor de verificat faptul că $U_n(\mathcal{K}_1) \subseteq \mathcal{K}_1$ şi $Y(n,k)(\mathcal{K}_1) \subseteq \mathcal{K}_1$ pentru toţi $n \geq k \geq 0$, $n,k \in$ $\mathbf{N}$.*

Definim operatorul Q_n: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ dat de formula

$$Q_n(S) = A_n^* S A_n + b_n B_n^* S B_n \tag{2.2.5}$$

unde A_n, B_n şi $b_n = E\left|\xi_n\right|^2 < \infty$ sunt definiţi ca mai sus . Este uşor de văzut că Q_n este un operator liniar şi mărginit. Definim operatorul $T(n,k)$ astfel: $T(n,k) = Q_k Q_{k+1}...Q_{n-1} \in L(\mathcal{E})$ pentru toţi $n-1 \geq k$ şi $T(k,k) = I$, unde I este operatorul identic pe $\mathcal{E}$. Teorema de mai jos dă o a doua reprezentare a soluţiilor sistemului (2.2.1) cu ajutorul operatorului $T(n,k)$. În [**49**] este dat un rezultat asemănător pentru sisteme discrete cu perturbaţii Markov şi spaţii finit dimensionale.

Teorema 2.2.4. *Dacă $X(n,k)$ este operatorul de evoluţie aleator definit de sistemul (2.2.1) atunci avem*

$$\langle T(n,k)(S)x, y\rangle = E\left\langle SX(n,k)x, X(n,k)y\right\rangle \tag{2.2.6}$$

pentru toţi $n \geq\ k \geq 0$, $S \in\ \mathcal{E}$ şi $x, y \in\ H$. În plus , $T(n,k)$ satisface ipotezele Lemei 2.2.2 .

Demonstraţie. Fie $S \in\ \mathcal{E}$ şi $x, y \in\ H$.Avem $E\left\langle SX(n,k)x, X(n,k)y\right\rangle =$

$$= E\left\langle S(A_{n-1} + \xi_{n-1}B_{n-1})X(n-1,k)x, (A_{n-1} + \xi_{n-1}B_{n-1})X(n-1,k)y\right\rangle$$

$$= E\left\langle SA_{n-1}X(n-1,k)x, A_{n-1}X(n-1,k)y\right\rangle +$$

$$+ E(\xi_{n-1}\left\langle SA_{n-1}X(n-1,k)x, B_{n-1}X(n-1,k)y\right\rangle) +$$

$$+ E(\xi_{n-1}\left\langle SB_{n-1}X(n-1,k)x, A_{n-1}X(n-1,k)y\right\rangle)\ +$$

$$+ E(\xi_{n-1}^2\left\langle SB_{n-1}X(n-1,k)x, B_{n-1}X(n-1,k)y\right\rangle).$$

Din independenţa variabilelor aleatoare $\{\xi_n\}$, $n \geq\ 1$ şi conform Corolarului C7 din [**60**] deducem că

$$\xi_{n-1}\text{şi}\ \left\langle AX(n-1,k)x, BX(n-1,k)y\right\rangle$$

sunt independente pentru toţi $A, B \in\ L(H)$. Analog, deducem că

$$\xi_{n-1}^2\text{şi}\ \left\langle AX(n-1,k)x, BX(n-1,k)y\right\rangle$$

sunt independente. Obţinem

$$E\langle SX(n,k)x, X(n,k)y\rangle = E\left\langle A_{n-1}^* S A_{n-1} X(n-1,k)x, X(n-1,k)y\right\rangle$$

$$+b_{n-1}E(\left\langle B_{n-1}^* S B_{n-1} X(n-1,k)x, X(n-1,k)y\right\rangle).$$

(Am folosit ipotezele $E(\xi_n) = 0$ şi $E|\xi_n|^2 = b_n$). Rezultă

$$E\langle SX(n,k)x, X(n,k)y\rangle = E\langle Q_{n-1}(S)X(n-1,k)x, X(n-1,k)y\rangle$$

pentru toţi $x, y \in H$.

Să considerăm operatorul $V(n,k) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$,

$$\langle V(n,k)(S)x, y\rangle = E\langle SX(n,k)x, X(n,k)y\rangle$$

pentru toţi $S \in \mathcal{E}$ şi $x, y \in H$.

Este uşor de văzut că $V(n,k)$ este bine definit deoarece membrul drept al egalităţii de mai sus defineşte o formă biliniară simetrică care la rândul ei defineşte un operator unic din $\mathcal{E}$.

Din relaţiile de mai sus obţinem $V(n,k)(S) = V(n-1,k)Q_{n-1}(S)$ dacă $n-1 \geq k$ şi $V(k,k) = I$. Deci $V(n,k) = T(n,k)$ şi rezultă (2.2.6). $T(n,k)$ satisface ipotezele Lemei 2.2.2 deoarece este uşor de văzut că $Q_p(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ pentru toţi $p \in \mathbf{N}$ şi de aici, $T(n,k)(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. □

Teorema următoare stabileşte o relaţie intre operatorul $T(n,k)$ şi operatorul de evoluţie $Y(n,k)$.

Teorema 2.2.5. *([**66**]) Dacă H este un spaţiu Hilbert separabil real atunci*

$$\|Y(n,k)(x\otimes x)\|_1 = \langle T(n,k)(I)x, x\rangle \quad \text{şi} \tag{2.2.7}$$

$$\|T(n,k)\| = \|Y(n,k)\|_1, \tag{2.2.8}$$

unde $\|Y(n,k)\|_1 = \sup\limits_{T \in \mathcal{N}, \|T\|_1 = 1} \|Y(n,k)(T)\|_1$ *şi* I *este operatorul identic pe* H.

Demonstraţie. Dacă aplicăm Teorema 2.2.4 avem

$$\langle T(n,k)(I)x, x\rangle = E\langle X(n,k)x, X(n,k)x\rangle = E\|X(n,k)x\|^2 .$$

Acum folosim (2.2.4) şi deducem (2.2.7). Este clar că

$$\begin{aligned}
\|T(n,k)(I)\| &= \sup_{\mathrm{x} \in \mathrm{H}, \|\mathrm{x}\|=1} \langle T(n,k)(I)x, x\rangle = \\
&= \sup_{\mathrm{x} \in \mathrm{H}, \|\mathrm{x}\|=1} \|\mathrm{Y(n,k)}(\mathrm{x} \otimes x)\|_1 = \\
&= \sup_{\mathrm{x}\otimes x \in \mathcal{N}, \|\mathrm{x}\otimes x\|_1=1} \|\mathrm{Y(n,k)}(\mathrm{x} \otimes x)\|_1 \leq \\
&\leq \sup_{\mathrm{T} \in \mathcal{N}, \|T\|_1=1} \|\mathrm{Y(n,k)(T)}\|_1 = \|\mathrm{Y(n,k)}\|_1 .
\end{aligned}$$

Să demonstrăm inegalitatea contrară. Fie $T \in \mathcal{N}$. Din Teorema 1.1.7 deducem că există o bază ortonormată $\{e_i\} \subset H, i \in \mathbf{N}^*$ şi un şir $\{\lambda_i\} \subset \mathbf{R}$, $\lambda_i \to 0$ astfel incât $T(e_i) = \lambda_i e_i$ şi $T = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i$, unde convergenţa este in normă. Astfel

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Y(n,k)}\|_1 &= \sup_{\mathrm{T} \in \mathcal{N}, \|T\|_1=1} \|\mathrm{Y(n,k)(T)}\|_1 = \\
&= \sup_{\mathrm{T} \in \mathcal{N}, \|T\|_1=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathrm{Y(n,k)}(e_i \otimes e_i) \right\|_1 .
\end{aligned}$$

Din (2.2.7), Lema 2.2.2 şi Propoziţia 1.1.8 obţinem

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Y(n,k)}\|_1 &\leq \sup_{\mathrm{T}\in\mathcal{N},\,\|T\|_1=1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\|\mathrm{Y(n,k)}(e_i\otimes e_i)\|_1 = \\
&= \sup_{\mathrm{T}\in\mathcal{N},\,\|T\|_1=1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\langle T(n,k)(I)e_i,e_i\rangle \leq \\
&\leq \sup_{\mathrm{T}\in\mathcal{N},\,\|T\|_1=1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\,\|\mathrm{T(n,k)(I)}\|\,\|e_i\|^2 = \\
&= \|\mathrm{T(n,k)(I)}\|\sup_{\mathrm{T}\in\mathcal{N},\,\|T\|_1=1}\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i| = \\
&= \|\mathrm{T(n,k)(I)}\|\,\|T\|_1 = \|\mathrm{T(n,k)(I)}\| = \|\mathrm{T(n,k)}\|\,.
\end{aligned}$$

Demonstraţia este completă. □

3. Stabilitatea şi instabilitatea exponenţială a sistemelor de ecuaţii stocastice discrete dependente de timp

În acest paragraf este tratată problema stabilităţii exponenţiale uniforme, a stabilităţii exponenţiale şi respectiv a instabilităţii exponenţiale, pentru sisteme dependente de timp, descrise de ecuaţii liniare stocastice discrete, considerate pe spaţii Hilbert infinit dimensionale. În ultimul subparagraf al acestei secţiuni este obţinută o caracterizare a stabilităţii exponenţiale uniforme folosind ecuaţii Lyapunov discrete.

3.1. Stabilitate exponenţială şi stabilitate exponenţială uniformă pentru sisteme liniare stocastice discrete cu coeficienţi variabili in timp. Scopul acestui subparagraf este stabilirea de teoreme ce dau condiţii necesare şi suficiente pentru a avea cele două tipuri de stabilitatea exponenţială introduse cu ajutorul definiţiilor de mai jos.

Definiţia 2.3.1. Spunem că sistemul (2.2.1) este *uniform exponenţial stabil* dacă există $\beta \geq 1$, $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$E\left\|X(n,k)x\right\|^2 \leq \beta a^{n-k}\left\|x\right\|^2 \tag{2.3.1}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$. Dacă perturbaţia stocastică lipseşte ($B_n = 0$ sau $\xi_n = 0$) atunci obţinem definiţia *stabilităţii exponenţiale uniforme* a sistemului determinist

$$x_{n+1} = A_n x_n, x_k = x, x \in H$$

Definiţia 2.3.2. Sistemul (2.2.1) este *exponenţial stabil* dacă există $\beta \geq 1, a \in (0,1)$ astfel incât

$$E\left\|X(n,0)x\right\|^2 \leq \beta a^{n-k} E\left\|X(k,0)x\right\|^2 \tag{2.3.2}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$.

În primul rând, vom da condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială uniformă (resp. stabilitatea exponenţială) a sistemului (2.2.1) folosind operatorul de evoluţie $Y(n,k) \in L(\mathcal{N})$.

Teorema 2.3.3. *([**66**]) Sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil dacă şi numai dacă sistemul (2.2.2) este uniform exponenţial stabil sau, echivalent, dacă şi numai dacă există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem*

$$\left\|Y(n,k)\right\|_1 \leq \beta a^{n-k} \tag{2.3.3}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$, unde

$$\left\|Y(n,k)\right\|_1 = \sup_{T\in\mathcal{N}\ ,\ \left\|T\right\|_1 = 1} \left\|Y(n,k)(T)\right\|_1 .$$

Demonstraţie. Din (2.2.4) şi Definiţia 2.3.1 rezultă că stabilitatea exponenţială uniformă a sistemului (2.2.1) este echivalentă cu faptul că există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$\|Y(n,k)(x \otimes x)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|x \otimes x\|_1 \tag{2.3.4}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$.

Deoarece implicaţia " $\Longleftarrow$ " este adevărată , ne rămâne să demonstrăm numai reciproca .

" $\Longrightarrow$" Fie $T \in \mathcal{N}$,$\|T\|_1 = 1$. Dacă $T = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i$ este descompunerea Hilbert -Schmidt (Teorema 1.1.7) a lui T, unde $\{e_i\} \subset H$, $i = 1,2,...$ este o bază ortonormată a lui H atunci aplicăm Corolarul 1.1.9 şi din faptul că $Y(n,k)$ este mărginit rezultă

$$\left\| Y(n,k)(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i) \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i Y(n,k)(e_i \otimes e_i) \right\|_1 \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \, \|Y(n,k)(e_i \otimes e_i)\|_1 .$$

Din (2.3.4) deducem că există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât

$$\|Y(n,k)(e_i \otimes e_i)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|(e_i \otimes e_i)\|_1$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$.

Deoarece sistemul $\{e_i\}, i \in \mathbf{N}^*$ este ortonormat , obţinem

$\|Y(n,k)(e_i \otimes e_i)\|_1 \leq \beta a^{n-k}$ pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi

$\|Y(n,k)(T)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$.

Aplicăm Propoziţia 1.1.8 şi avem $\|Y(n,k)(T)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|T\|_1$ şi obţinem concluzia. Demonstraţia este completă. $\square$

Afirmaţia teoremei de mai sus rămâne adevărată şi in cazul in care spaţiul Hilbert H este complex, dacă inlocuim pe $\mathcal{N}$ cu $C_1(H)$.

Astfel avem :

Teorema 2.3.4. *([66]) Dacă H este un spaţiu Hilbert separabil, complex atunci sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil dacă şi numai dacă sistemul (2.2.2) este uniform exponenţial stabil pe $C_1(H)$.*

Demonstraţie. Teorema se demonstrează argumentând ca in demonstraţia teoremei de mai sus.

Vom demonstra implicaţia " $\Longrightarrow$" numai in cazul in care $T \in C_1(H) - \mathcal{N}$. Este cunoscut faptul că există doi operatori autoadjuncţi $T_1 = \frac{T+T^*}{2}$, $T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$ astfel incât $T = T_1 + iT_2$. Avem $\|T_1\|_1 \leq 1/2(\|T\|_1 + \|T^*\|_1) = \|T\|_1 < \infty$ şi $T_1 \in C_1(H)$ şi in mod analog se stabileşte că $\|T_2\|_1 \leq \|T\|_1 < \infty$ şi $T_2 \in C_1(H)$. Astfel, obţinem $\|Y(n,k)(T)\|_1 \leq \|Y(n,k)(T_1)\|_1 + \|Y(n,k)(T_2)\|_1$. Folosind aceeaşi demonstraţie ca in teorema precedentă putem arăta că există $\beta > 0$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât $\|Y(n,k)(T_1)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|T_1\|_1$ şi $\|Y(n,k)(T_2)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|T_2\|_1$ oricare ar fi $n \geq k \geq 0$ .Astfel, avem

$$\|Y(n,k)(T)\|_1 \leq \|Y(n,k)(T_1)\|_1 + \|Y(n,k)(T_2)\|_1 \leq 2\beta a^{n-k} \|T\|_1$$

şi rezultă concluzia. □

Teorema 2.3.5. *([66]) Sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil dacă şi numai dacă există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem*

$$\|Y(n,0)(T)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|Y(k,0)(T)\|_1 \tag{2.3.5}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $T \in \mathcal{K}_1$, unde $\mathcal{K}_1$ este conul operatorilor nenegativi din $C_1(H)$.

Demonstraţie. " $\Leftarrow$ " Considerăm (2.3.5) pentru $T = x \otimes x$. şi rezultă $\|Y(n,0)(x \otimes x)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|Y(k,0)(x \otimes x)\|_1$. Acum aplicăm (2.2.4) şi Definiţia 2.3.2 şi obţinem concluzia.

" $\Rightarrow$ " Fie $T \in \mathcal{K}_1$. Dacă $T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(e_i \otimes e_i)$ este descompunerea Hilbert -Schmidt a lui T atunci $\lambda_i \geq 0$ pentru toţi $i = 1, 2....$

Din definiţia lui $\|.\|_1$ rezultă că dacă T_1 , $T_2 \in \mathcal{K}_1$ şi c, d sunt numere reale nenegative atunci $\|cT_1 + dT_2\|_1 = Tr(cT_1 + dT_2) = cTr(T_1) + dTr(T_2)$= $c\|T_1\|_1 + d\|T_2\|_1$.

Astfel, deoarece sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil, putem aplica Corolarul 1.1.9 şi folosind mărginirea lui $Y(n, k)$ şi proprietatea de mai sus a lui $\|.\|_1$ avem :

$$\begin{aligned}\|Y(n,0)(T)\|_1 &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i Y(n,0)(e_i \otimes e_i)\right\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|Y(n,0)(e_i \otimes e_i)\|_1 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta a^{n-k} \|Y(k,0)(e_i \otimes e_i)\|_1 = \\ &= \beta a^{n-k} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|Y(k,0)(e_i \otimes e_i)\|_1 = \\ &= \beta a^{n-k} \|Y(k,0)(T)\|_1\end{aligned}$$

pentru toţi $n \geq \ k \geq 0$. Demonstraţia este terminată . $\square$

Observaţia 2.3.6. *Afirmaţiile teoremei de mai sus rămân valabile dacă H este spaţiu Hilbert complex iar conul $\mathcal{K}_1$ al operatorilor nenegativi din $\mathcal{N}$ este inlocuit cu conul operatorilor nenegativi din $C_1(H)$*

Rezultatele de mai sus ne permit să obţinem caracterizări ale stabilităţii exponenţiale şi respectiv stabilităţii exponenţiale uniforme ale sistemului (2.2.1) folosind ambii operatori $Y(n, k)$ şi $T(n, k)$.

Teorema 2.3.7. *([**66**]) Următoarele afirmaţii sunt echivalente :*

a) sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil

b) există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$\|Y(n,k)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \tag{2.3.6}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$.

c) există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$\|T(n,k)\| \leq \beta a^{n-k} \tag{2.3.7}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$

Demonstraţie. Echivalenţa dintre a) şi b) este este o consecinţă a Teoremei 2.3.3 iar echivalenţa " b) $\Leftrightarrow$ c)" rezultă din Teorema 2.2.5. $\square$ Demonstraţia este completă.

Teorema 2.3.8. [**66**] *Următoarele afirmaţii sunt echivalente :*

a) sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil

b) există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$\|Y(n,0)(T)\|_1 \leq \beta a_1^{n-k} \|Y(k,0)(T)\| \tag{2.3.8}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $T \in \mathcal{K}_1$ unde $\mathcal{K}_1$ este conul tuturor operatorilor nenegativi din $C_1(H)$.

c) există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$\langle T(n,0)(I)x,x\rangle \leq \beta a^{n-k} \langle T(k,0)(I)x,x\rangle \tag{2.3.9}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$, unde I este operatorul identic pe H.

Demonstraţie. Echivalenţa dintre a) şi b) este a consecinţă Teoremei 2.3.5 iar echivalenţa " a) $\Leftrightarrow$ c)" rezultă din Definiţia 2.3.2 şi din (2.2.6). Demonstraţia este completă. $\square$

Propoziţia de mai jos este o consecinţă a teoremelor T.2.3.8 şi T.2.3.7.

Propoziţia 2.3.9. *Dacă sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil atunci el este exponenţial stabil.*

Demonstraţie. Dacă (2.2.1) este uniform exponenţial stabil atunci rezultă din Teorema 2.3.7 că există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem $\|Y(n,k)\|_1 \leq \beta a^{n-k}$ pentru toţi $n \geq k \geq 0$ sau echivalent

$\|Y(n,k)(T)\|_1 \leq \beta a^{n-k} \|T\|_1$ pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $T \in \mathcal{N}$. Fie $T = Y(k,0)(S)$, unde $S \in \mathcal{K}_1$ este arbitrar.

Atunci rezultă (2.3.8) şi conform Teoremei 2.3.8 rezultă concluzia.

$\square$

În continuare vom da un exemplu de sistem exponenţial stabil care nu este uniform exponenţial stabil.

Exemplu. Considerăm sistemul (2.2.1) in cazul in care $B_n = 0, A_0 \in L(H)$ este un operator care nu este injectiv iar $A_n = 2P_0$ oricare ar fi $n \geq 1$, unde P_0 este proiecţia pe $KerA_0$. Atunci oricare ar fi $n \geq k > 0$ sau $n > 1 \geq k$ avem $X(n,0)x = 0$ şi este clar că avem (2.3.2). Dacă luăm $\beta = 2\max\{1, \|A_0\|\}$ şi $a = \frac{1}{2}$ atunci este clar că dacă $n = k \in \{0,1\}$ sau $n = 1, k = 0$ avem de asemenea (2.3.2). În concluzie sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil.

Pentru orice $n > k > 1$ avem $X(n,k)x = A_{n-1}...A_k x = 2^{n-k}P_0 x$. Dacă presupunem prin absurd că sistemul este uniform exponenţial stabil rezultă că există $\beta \geq 1, a \in (0,1)$ astfel incât $\|X(n,k)x\|^2 \leq \beta a^{n-k} \|x\|^2$ oricare ar fi $n \geq k \geq 0, x \in H$. Deci pentru $n > k > 1$ avem $\left\|2^{n-k}P_0 x\right\|^2 \leq \beta a^{n-k} \|x\|^2$ sau $\|P_0 x\|^2 \leq \beta (\frac{a}{4})^{n-k} \|x\|^2$ oricare ar fi $x \in H$. Dacă $n-k \to \infty$, deducem că $P_0 = 0$, ceea ce contrazice ipoteza.

Propoziţiile de mai jos stabilesc exprimări echivalente pentru stabilitatea exponenţială uniformă şi respectiv stabilitatea exponenţială.

Propoziţia 2.3.10. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

a) Sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil

b) Există $\beta \geq 1$, $a \in (0,1)$ şi $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel incât să avem

$$E\left\|X(n,k)x\right\|^2 \leq \beta a^{n-k}\left\|x\right\|^2$$

pentru toţi $n \geq k \geq n_0$ şi $x \in H$.

Demonstraţie. "$a) \Rightarrow b)$" este evidentă.Vom demonstra "$b) \Rightarrow a)$". Din Teorema 2.2.4 şi Lema 2.2.2 rezultă că ipoteza b) este echivalentă cu faptul că există $\beta \geq 1$, $a \in (0,1)$ şi $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel incât să avem $\|T(n,k)\| \leq \beta a^{n-k}$oricare ar fi $n \geq k \geq n_0$. Vom demonstra că există $\widetilde{\beta}\geq 1$ şi $\widetilde{a}\in (0,1)$ astfel incât $\|T(n,k)\| \leq \widetilde{\beta}\widetilde{a}^{n-k}$ oricare ar fi $n \geq k \geq 0$. Atunci, conform Teoremei 2.3.7, rezultă concluzia.

Fie $n \geq k \geq 0$. Dacă $n \geq k \geq n_0$ atunci este clar că avem

$$\|T(n,k)\| \leq \beta a^{n-k}$$

oricare ar fi $n \geq k \geq n_0$. Dacă $n \geq n_0 \geq k$ atunci

$$\|T(n,k)\| \leq \|T(n_0,k)\|\,\|T(n,n_0)\| \leq \beta a^{n-k}a^{k-n_0}\|T(n_0,k)\|$$

iar dacă $n_0 \geq n \geq k \geq 0$ atunci $\|T(n,k)\| \leq a^{n-k}a^{k-n}\|T(n,k)\|$.

Luăm $\widetilde{\beta} = \max\{\beta, \max\limits_{k \leq n_0}\{a^{k-n_0}\|T(n_0,k)\|\}, \max\limits_{0\leq k\leq n\leq n_0}\{a^{k-n}\|T(n,k)\|\}\}$, $\widetilde{a} = a$ şi am obţinut ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

Propoziţia 2.3.11. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) Sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil *b) Există $\beta \geq 1$, $a \in (0,1)$ şi $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel incât să avem*

$$E\left\|X(n,0)x\right\|^2 \leq \beta a^{n-k} E\left\|X(k,0)x\right\|^2 \tag{2.3.10}$$

pentru toţi $n \geq k \geq n_0$ şi $x \in\ H$.

Demonstraţie. "$a) \Rightarrow b)$" este evidentă.

"$b) \Rightarrow a)$" (2.3.10) este echivalentă (conform unui raţionament similar celui folosit in demonstraţia Teoremei 2.3.8) cu

$\left\|Y(n,0)(T)\right\|_1 \leq \beta a^{n-k}\left\|Y(k,0)(T)\right\|_1, T \in \mathcal{K}_1$.

Fie $n \geq\ k \geq 0$. Dacă $n \geq\ k \geq n_0$ atunci

$$\left\|Y(n,0)(T)\right\|_1 \leq \beta a^{n-k}\left\|Y(k,0)(T)\right\|_1$$

oricare ar fi $T \in \mathcal{K}_1$. Dacă $n \geq n_0 \geq k$ atunci

$$\begin{aligned}\left\|Y(n,0)(T)\right\|_1 &\leq \beta a^{n-n_0}\left\|Y(n_0,k)Y(k,0)(T)\right\|_1 \leq \\ &\leq \beta a^{n-k}[a^{k-n_0}\left\|Y(n_0,k)\right\|]\left\|Y(k,0)(T)\right\|_1\end{aligned}$$

oricare ar fi $T \in \mathcal{K}_1$ iar dacă $n_0 \geq n \geq k \geq 0$ atunci

$$\left\|Y(n,0)(T)\right\|_1 \leq a^{n-k}[a^{k-n}\left\|Y(n,k)\right\|]\left\|Y(k,0)(T)\right\|_1.$$

Luăm $\widetilde{\beta} = \max\{\beta, \max\limits_{k\leq n_0}\{a^{k-n_0}\left\|Y(n_0,k)\right\|\}, \max\limits_{0\leq k\leq n\leq n_0}\{a^{k-n}\left\|T(n,k)\right\|\}\}$,

$\widetilde{a} = a$ şi avem $\left\|Y(n,0)(T)\right\|_1 \leq \widetilde{\beta}\widetilde{a}^{n-k}\left\|Y(k,0)(T)\right\|_1$ oricare ar fi $n \geq\ k \geq 0$ şi $T \in \mathcal{K}_1$. $\square$

Rezultatele de mai jos reprezintă alte caracterizari deterministe ale stabilităţii exponenţiale a sistemului (2.2.1) şi sunt necesare in ultimul paragraf al acestui capitol.

Teorema 2.3.12. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) Sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil.

2) există $M > 0$ și $q \in [1, \infty)$ astfel incât să avem

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Y(k,0)(x \otimes x)\|_1^q \leq M \|Y(n,0)(x \otimes x)\|_1^q$$

oricare ar fi $n \geq 0$ și $x \in H$.

Demonstraţie. Vom demonstra mai intâi implicaţia "1) $\Rightarrow$ 2)". Dacă sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil atunci este uşor de văzut că există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât oricare ar fi $k \geq n \geq 0$ să avem relaţia $\|Y(k,0)(x \otimes x)\|_1^q \leq \beta a^{k-n} \|Y(n,0)(x \otimes x)\|_1^q$.

Scriem relaţia de mai sus pentru $k = n+1, n+2, ..., L$ şi adunând relaţiile obţinute membru cu membru obţinem

$$\sum_{k=n+1}^{L} \|Y(k,0)(x \otimes x)\|_1^q \leq \sum_{k=n+1}^{L} \beta a^{k-n} \|Y(n,0)(x \otimes x)\|_1^q.$$

Trecem la limită pentru $L \to \infty$ şi avem $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Y(k,0)((x \otimes x))\|_1^q \leq \frac{\beta a}{1-a} \|Y(n,0)(x \otimes x)\|_1^q$ şi luând $M = \frac{\beta a}{1-a}$ obţinem concluzia.

"2) $\Rightarrow$ 1)" Dacă notăm $S_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|Y(k,0)(x \otimes x)\|_1^q$ atunci relaţia din ipoteză se mai scrie $S_{n+1} \leq M(S_n - S_{n+1})$ sau $(M+1)S_{n+1} \leq MS_n$ oricare ar fi $n \geq 0$. Este uşor de văzut că avem $\|Y(n,0)(x \otimes x)\|_1^q \leq S_n \leq (M/(M+1))^{n-k-1} S_{k+1} \leq [M/(M+1)]^{n-k} (M+1) \|Y(k,0)(x \otimes x)\|_1^q$ oricare ar fi $n, k \in \mathbf{N}$, $n > k \geq 0$. Cu notaţia $a = [M/(M+1)]^{\frac{1}{q}}$ şi $\beta = \max\{1, (M+1)^{\frac{1}{q}}\}$ obţinem concluzia. $\square$

În mod analog putem stabili teorema de mai jos.

Teorema 2.3.13. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) Sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil.

2) există $M > 0$ și $q \in [1, \infty)$ astfel incât să avem

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Y(k,0)(S)\|_1^q \leq M \|Y(n,0)(S)\|_1^q$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ și $S \in \mathcal{K}_1$.

3.2. Instabilitate exponenţială. În cele ce urmează vom defini noţiunea de instabilitate exponenţială şi vom da câteva caracterizări deterministe ale acesteia.

Definiţia 2.3.14. Sistemul (2.2.1) este *exponenţial instabil* dacă şi numai dacă există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$ să avem $\beta a^{n-k} E \left\| X(n,0)x \right\|^2 \geq E \left\| X(k,0)x \right\|^2$

Teorema 2.3.15. *Sistemul (2.2.1) este exponenţial instabil dacă şi numai dacă există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât*

$$\beta a^{n-k} \left\| Y(n,0)(S) \right\|_1 \geq \left\| Y(k,0)(S) \right\|_1 \tag{2.3.11}$$

oricare ar fi $S \in \mathcal{K}_1$, $n \geq k \geq 0$ unde $Y(n,k)$ este operatorul de evoluţie asociat sistemului determinist (2.2.2) iar $\mathcal{K}_1$ este conul tuturor operatorilor nenegativi din $\mathcal{N}$.

Demonstraţie. Vom demonstra mai intâi necesitatea. Din Definiţia 2.3.14 şi teorema de reprezentare a mediei pătrate a soluţiei ecuaţiei (2.2.1) in funcţie de operatorul $Y(n,k)$, deducem că sistemul (2.2.1) este exponenţial instabil dacă şi numai dacă există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât

$$\beta a^{n-k} \left\| Y(n,0)(x \otimes x) \right\|_1 \geq \left\| Y(k,0)(x \otimes x) \right\|_1 \tag{2.3.12}$$

oricare ar fi $x \in H$ Fie $S \in \mathcal{K}_1$. Dacă $S = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i$ este descompunerea Hilbert -Schmidt a lui S atunci nu este dificil de văzut că $\lambda_i \geq 0$ şi

$$\left\| Y(n,0) S \right\|_1 = \left\| Y(n,0) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i \right) \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i Y(n,0)(e_i \otimes e_i) \right\|_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left\| Y(n,0)(e_i \otimes e_i) \right\|_1 .$$

Aplicând relaţia (2.3.12) este clar că

$$\beta a^{n-k} \left\| Y(n,0) S \right\|_1 \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left\| Y(k,0)(e_i \otimes e_i) \right\|_1 \tag{2.3.13}$$

Deoarece, la fel ca mai sus, se poate stabili că

$$\left\| Y(k,0) S \right\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left\| Y(k,0)(e_i \otimes e_i) \right\|_1 ,$$

este clar, in acest moment, că avem $\beta a^{n-k} \left\| Y(n,0) S \right\|_1 \geq \left\| Y(k,0) S \right\|_1 .$ Suficienţa este o consecinţă a relaţiei (2.3.12). □

O primă consecinţă a teoremei de mai sus este corolarul următor:

Corolarul 2.3.16. *Dacă sistemul determinist (2.2.2) este exponenţial instabil atunci sistemul stocastic (2.2.1) este exponenţial instabil.*

Propoziţia 2.3.17. *În cazul finit dimensional, determinist* ($B_n = 0$) *sistemul (2.2.1) este exponenţial instabil dacă şi numai dacă sistemul (2.2.2) este exponenţial instabil.*

Demonstraţie. Deoarece suficienţa rezultă din corolarul de mai sus trebuie să demonstrăm necesitatea.

Sistemul (2.2.1), unde $B_n = 0$, este exponenţial instabil dacă există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât, pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$, să avem $\beta a^{n-k} \left\| X(n,0) x \right\|^2 \geq \left\| X(k,0) x \right\|^2$. Dacă luăm $k = 0, n > 0$ in ultima relaţie, deducem că $\beta a^n \left\| A_{n-1} ... A_0 x \right\|^2 \geq \left\| x \right\|^2$ şi deci operatorul $A_{n-1}...A_0$ este inversabil oricare ar fi $n > 0$. De aici, rezultă că $A_{n-1}...A_k$ este inversabil oricare ar fi $n > k \geq 0$. Mai mult, oricare ar fi $y \in H$ există $x \in H$ astfel incât $y = A_k...A_0 x$ şi $\beta a^{n-k} \left\| A_{n-1}...A_k y \right\|^2 \geq \left\| y \right\|^2$. Atunci este clar că $\left\| (A_{n-1}...A_k)^{-1} \right\|^2 \leq \beta a^{n-k}$. Fie $S \in \mathcal{N}$. Avem

$$\left\| Y(k,0)(S) \right\|_1 = \left\| A_{k-1}...A_0 S A_0^* ... A_{k-1}^* \right\|_1 =$$

$$= \left\| (A_{n-1}...A_k)^{-1} A_{n-1}...A_0 S A_0^*...A_{n-1}^* (A_k^*...A_{n-1}^*)^{-1} \right\|_1 \leq$$

$$\leq \left\| (A_{n-1}...A_k)^{-1} \right\|^2 \left\| A_{n-1}...A_0 S A_0^*...A_{n-1}^* \right\|_1 \leq \beta a^{n-k} \left\| Y(n,0)(S) \right\|_1 .$$

Demonstraţia a fost incheiată. □

Reciproca corolarului de mai sus nu este adevărată după cum ne arată următorul contraexemplu.

Contraexemplu. Fie $A_n = A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_n = B = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$b_n = b = 1, n \in \mathbf{N}$. Instabilitatea exponenţială a sistemului (2.2.1) este echivalentă, conform Teoremei 2.2.5 şi relaţiei (2.3.12), cu faptul că există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât

(2.3.14)

$$\beta a^{n-k} \langle T(n,0)(I)x, x\rangle \geq \langle T(k,0)(I)x, x\rangle \text{ oricare ar fi } n \geq k \geq 0.$$

Deoarece $AB = BA = 0, A^n = 2^n A, B^n = 2^n B$ iar A şi B sunt autoadjuncţi, este uşor de văzut că $T(n,0)(I) = 2^{2n}(A+B) = 2^{2n} I$ şi este clar că avem (2.3.14). Deci, sistemul (2.2.1) este exponenţial instabil. Pe de altă parte, $Y(n,0)(S) = 2^{2n}(ASA + BSB)$ pentru toţi $n > 0$ şi dacă luăm $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avem $Y(n,0)(S) = 0$. Acum este clar că, pentru $n > 0$ şi $k = 0$, relaţia (2.3.11) este falsă. Deci, sistemul determinist (2.2.2) nu este exponenţial instabil.

Teorema 2.3.18. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) sistemul (2.2.1) este exponenţial instabil;

2) există $M > 1$ şi $q \in [1, \infty)$ astfel incât

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| Y(k,0)(x \otimes x) \right\|_1^q \leq M \left\| Y(n,0)(x \otimes x) \right\|_1^q$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 0$ şi $x \in H$.

Demonstraţie. "1) $\Rightarrow$ 2)" Aplicăm (2.2.4) şi deducem că sistemul (2.2.1) este exponenţial instabil dacă şi numai dacă există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem (2.3.12). Atunci

$$\sum_{k=0}^{n} \|Y(k,0)(x\otimes x)\|_1^q \leq \sum_{k=0}^{n} \beta a^{n-k} \|Y(n,0)(x\otimes x)\|_1 \leq$$
$$\leq \beta \frac{1-a^n}{1-a} \|Y(n,0)(x\otimes x)\|_1 .$$

Luăm $M = \max\{2, \beta\frac{1}{1-a}\}$ şi rezultă concluzia.

"1) $\Rightarrow$ 2)" Pentru a demonstra reciproca notăm cu S_n suma $\sum\limits_{k=0}^{n} \|Y(k,0)(x\otimes x)\|_1^q$ şi observăm că ipoteza se mai scrie $S_n \leq M(S_n - S_{n-1})$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$sau, in mod echivalent, $MS_{n-1} \leq (M-1)S_n$. Atunci $(M/(M-1))^{n-k}S_k \leq S_n$, oricare ar fi $n \geq k \geq 0$. Deoarece $\|Y(k,0)(x\otimes x)\|_1^q \leq S_k$ şi $S_n \leq M\|Y(n,0)(x\otimes x)\|_1^q$, luăm $a = ((M-1)/M)^{\frac{1}{q}}$ şi $\beta = M$ şi obţinem concluzia. $\square$

Exact in acelaşi mod in care a fost demonstrată teorema de mai sus se poate arăta că avem:

Teorema 2.3.19. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) sistemul (2.2.1) este exponenţial instabil

2) există $M > 1$ şi $q \in [1,\infty)$ astfel incât

$$\sum_{k=0}^{n} \|Y(k,0)(S)\|_1^q \leq M\|Y(n,0)(S)\|_1^q$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ şi $S \in \mathcal{K}_1$.

3.3. Stabilitatea exponenţială uniformă şi ecuaţiile Lyapunov. Considerăm pe spaţiul $\mathcal{E}$ următoarea ecuaţie Lyapunov

$$P_n = A_n^* P_{n+1} A_n + b_n B_n^* P_{n+1} B_n + W_n, \tag{2.3.15}$$

unde $\{W_n\}$ este un şir in $\mathcal{E}$ cu proprietatea că există numerele reale $u, v > 0$ astfel incât să avem

$$u\|x\|^2 \leq \langle W_n\, x, x\rangle \leq \ v\|x\|^2 \tag{2.3.16}$$

pentru toţi $n \in \mathbf{N}$ şi $x \in H$.

Este uşor de văzut că dacă are loc (2.3.16) atunci $\|W_n\| \leq v$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$.

Acum putem să demonstrăm următoarea teoremă:

Teorema 2.3.20. *([**66**]) Sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil dacă şi numai dacă ecuaţia (2.3.15) admite o soluţie unică $P = (P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu proprietatea că există $m, M > 0$ astfel incât*

$$m\|x\|^2 \leq \langle P_n\, x, x\rangle \leq \ M\|x\|^2 \tag{2.3.17}$$

pentru toţi $n \in \mathbf{N}$ şi $x \in H$.

Demonstraţie. Vom demonstra implicaţia " $\Rightarrow$ ". Dacă Q_n sunt operatorii liniari şi mărginiţi definiţi de relaţia (2.2.5) atunci introducem operatorul liniar

$$P_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} Q_n...Q_{k-1}(W_k) + W_n = \sum_{k=n}^{\infty} T(k,n)(W_k).$$

P_n este bine definit dacă seria $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(W_k)$ este convergentă in norma operatorială. Conform Propoziţiei P.1.9 din [**14**] este suficient să arătăm că seria $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \|T(k,n)(W_k)\|$ este convergentă in $\mathbf{R}$.

Din Teorema 2.3.7 şi ipoteză deducem că există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât

$$\|T(n,k)\| \leq \beta a^{n-k}$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$. Atunci

$$\sum_{k=n}^{\infty}\|T(k,n)(W_k)\| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\beta a^{k-n}\|W_k\| \leq v\sum_{k=n}^{\infty}\beta a^{k-n} = \frac{v\beta}{1-a} < \infty.$$

Deci $\sum_{k=n}^{\infty}\|T(k,n)(W_k)\|$ converge in $\mathbf{R}$ şi in consecinţă , $\sum_{k=n}^{\infty}T(k,n)(W_k)$ converge in $L(H)$.

Mai mult , dacă $M = \frac{v\beta}{1-a}$ atunci avem $\left\|\sum_{k=n}^{\infty}T(k,n)(W_k)\right\| \leq M$.

Astfel $\|P_n\| \leq M$. Deoarece $T(n,k) \in L(\mathcal{E})$ şi $W_k \in \mathcal{E}$ pentru toţi $n \geq k \geq 0$, deducem $P_n \in \mathcal{E}$; de aici

$$\langle P_n x, x\rangle \leq M\|x\|^2$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$.

Pentru a demonstra cealaltă inegalitate a lui (2.3.17), observăm că $T(n,k)(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ (Teorema 2.2.4) şi deoarece $W_k \in \mathcal{K}$, rezultă

$T(k,n)(W_k) \geq 0$. Astfel avem

$$\langle P_n\ x, x\rangle \geq \langle W_n\ x, x\rangle \geq u\|x\|^2 . \tag{2.3.18}$$

Luăm $m = u$ şi demonstraţia inegalităţii (2.3.17) este terminată . Avem

$$\begin{aligned} Q_n(P_{n+1}) + W_n &= \sum_{k=n+2}^{\infty} Q_n Q_{n+1} ... Q_{k-1}(W_k) + Q_n(W_{n+1}) + W_n = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} Q_n ... Q_{k-1}(W_k) + W_n = P_n. \end{aligned}$$

Rezultă că P_n este o soluţie a ecuaţiei (2.3.15).

Acum vom demonstra unicitatea soluţiei. Presupunem că R_n este o altă soluţie a ecuaţiei (2.3.15) care satisface (2.3.17). Atunci avem succesiv $P_n - R_n = Q_n(P_{n+1} - R_{n+1})$, $P_n - R_n = T(n+k,n)(P_{n+k} - R_{n+k})$.

Conform relaţiei (2.3.17) avem $\|P_{n+k} - R_{n+k}\| \leq \|P_{n+k}\| + \|R_{n+k}\| \leq 2M$ şi

(2.3.19)
$$\|P_n - R_n\| \leq \|T(n+k,n)\| \, \|P_{n+k} - R_{n+k}\| \leq 2M \, \|T(n+k,n)\|$$

Aplicăm ipoteza şi Teorema 2.3.7 şi rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} \|T(n+k,n)\| = 0$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$.

Trecem la limită pentru $k \to \infty$ in (2.3.19) şi deducem că $P_n = R_n$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$.

" $\Leftarrow$ ".

Fie P_n soluţia ecuaţiei (2.3.15) care satisface (2.3.17).

Este uşor de verificat că avem

$$P_n = T(n+1,n)(P_{n+1}) + W_n.$$

Astfel

$$E\left\langle P_n X(n,k)x, X(n,k)x\right\rangle = E\left\langle T(n+1,n)(P_{n+1})X(n,k)x, X(n,k)x\right\rangle + E\left\langle W_n X(n,k)x, X(n,k)x\right\rangle$$

pentru toţi $n \geq k \geq 0$. Din Teorema 2.2.4 obţinem

$$E\left\langle T(n+1,n)(P_{n+1})X(n,k)x, X(n,k)x\right\rangle = \left\langle T(n,k)T(n+1,n)(P_{n+1})x, x\right\rangle =$$

$$\left\langle T(n+1,k)(P_{n+1})x, x\right\rangle = E\left\langle P_{n+1}X(n+1,k)x, X(n+1,k)x\right\rangle$$

Atunci

$$\left\langle T(n,k)(P_n)x, x\right\rangle =$$

$$\left\langle T(n+1,k)(P_{n+1})x, x\right\rangle + \left\langle T(n,k)(W_n)x, x\right\rangle.$$

Din (2.3.15), (2.3.16), (2.3.17) şi din faptul că P_n este nenegativ rezultă că $W_n \geq \frac{u}{M} P_n$ şi $M \geq u$. Este clar că putem alege constanta u astfel incât $M > u$. Deducem că

$$\langle T(n,k)(P_n)x, x\rangle \geq \langle T(n+1,k)(P_{n+1})x, x\rangle + \frac{u}{M}\langle T(n,k)(P_n)x, x\rangle .$$

De aici avem

$$(1 - \frac{u}{M})\langle T(n,k)(P_n)x, x\rangle \geq \langle T(n+1,k)(P_{n+1})x, x\rangle .$$

Se arată prin inducţie că $(1-\frac{u}{M})^{n+1-k}\langle P_k x, x\rangle \geq \langle T(n+1,k)(P_{n+1})x, x\rangle$.

Din (2.3.17) rezultă

$$m\langle T(n+1,k)(I)x, x\rangle \leq M(1-\frac{u}{M})^{n+1-k}\|x\|^2 \text{ oricare ar fi } n \geq k \geq 0$$

Luăm $\beta = \frac{M}{m} \geq 1$, $\alpha = 1 - \frac{u}{M}$ şi obţinem $\|T(n+1,k)(I)\| \leq \beta a^{n+1-k}$. Aplicând Lema 2.2.2 şi Teorema 2.3.7 rezultă concluzia. Demonstraţia este completă. □

4. Stabilitatea sistemelor liniare stocastice discrete in cazul staţionar

În acest paragraf considerăm cazul sistemelor invariante in timp, când $A_n = A, B_n = B$ şi $b_n = b$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. Am obţinut câteva noi echivalenţe pentru stabilitatea exponenţială uniformă a soluţiilor sistemelor discutate şi am rezolvat ecuaţia algebrică Lyapunov asociată acestora.

4.1. Teoreme de caracterizare a stabilităţii exponenţiale pentru sisteme liniare stocastice discrete in cazul staţionar.

În acest caz operatorii U_n şi Q_n, daţi de formulele (2.2.3) şi (2.2.5), devin

$$U_n(Y) = U(Y) = AYA^* + bBYB^*,$$

pentru toţi $Y \in \mathcal{N}$ şi

$$Q_n(Y) = Q(Y) = A^*YA + bB^*YB,$$

pentru toţi $Y \in \mathcal{E}$. Astfel, obţinem

$$Y(n,k)(Y) = Y(n-k,0)(Y) \text{şi } Y(n,k)(Y) = U^{n-k}(Y), \tag{2.4.1}$$

pentru toţi $Y \in \mathcal{N}$ şi respectiv

$$T(n,k)(Y) = T(n-k,0)(Y) \text{şi } T(n,k)(Y) = Q^{n-k}(Y), \tag{2.4.2}$$

pentru toţi $Y \in \mathcal{E}$.

Teorema următoare stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială uniformă a sistemului (2.2.1) (cazul staţionar) şi demonstrează că in acest caz noţiunile de stabilitate exponenţială şi stabilitate exponenţială uniformă sunt echivalente.

Teorema 2.4.1. [**71**]*Afirmaţiile de mai jos sunt echivalente:*

a) sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil

b) există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$\|Y(n,0)\|_1 \leq \beta a^n \text{ sau echivalent } \|U^n\|_1 \leq \beta a^n \tag{2.4.3}$$

*pentru toţi $n \in$ **N**.*

c) există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem

$$\|T(n,0)\| \leq \beta a^n \text{ sau echivalent } \|Q^n\| \leq \beta a^n \tag{2.4.4}$$

*pentru toţi $n \in$ **N**.*

d) $\quad r(U) < 1,$

e) $r(Q) < 1$,

f) $lim_{n\to\infty}\ E\|X(n,0)x\|^2 = 0$ *uniform pentru orice* $x \in H$, $\|x\| = 1$.

g) $lim_{n\to\infty}\ \|Y(n,0)(x\otimes x)\|_1^2 = 0$ *uniform pentru oricare* $x \in H$, $\|x\| = 1$.

h) sistemul (2.2.1) este exponenţial stabil.

Am notat cu $r(U)$ *(respectiv* $r(Q)$*) raza spectrală a lui* U *(respectiv* Q*).*

Demonstraţie. Din Teorema 2.3.7 şi relaţiile (2.4.1), (2.4.2) rezultă echivalenţele "$a) \Leftrightarrow b)$" şi "$a) \Leftrightarrow c)$". Vom demonstra "$b) \Leftrightarrow d)$".

"$b) \Rightarrow d)$". Din (2.4.3) avem $\|U^n\|_1 \le \beta a^n$ şi folosind T.2.38 din [**14**] observăm că

$r(U) = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|U^n\|_1} \le a < 1$.

"$d) \Rightarrow b)$" Fie $r(U) = lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|U^n\|_1} = s < 1$ şi $\varepsilon > 0$ astfel incât $s + \varepsilon = a < 1$. Atunci, există $k_0 \in \mathbf{N}$ astfel incât să avem $\|U^n\|_1 \le a^n$ pentru toţi $n \ge k_0$.

Dacă luăm $\beta = \max\{1, \frac{\|U\|_1}{a}, ..., \frac{\|U^{k_0-1}\|_1}{a^{k_0-1}}\}$ obţinem concluzia. Analog se poate arăta că avem echivalenţa "$c) \Leftrightarrow e)$". Echivalenţa "$f) \Leftrightarrow g)$" este a o consecinţă a relaţiei (2.2.4).

Implicaţia "$b) \Rightarrow g)$" este in mod evident adevărată şi deoarece "$a) \Leftrightarrow b)$" şi "$f) \Leftrightarrow g)$", obţinem "$a) \Rightarrow f)$". Reciproc, din f) şi (2.2.6) deducem

$$lim_{n\to\infty} \langle T(n,0)(I)x, x\rangle = 0$$

uniform pe H, $\|x\| = 1$.

Astfel, deducem că există $k_0 \in \mathbf{N}$ astfel incât $\langle T(k_0,0)(I)x, x\rangle < \frac{1}{2}$, pentru toţi $x \in H$, $\|x\| = 1$. Deoarece $T(k_0,0)(I) \ge 0$ şi $\|T(k_0,0)(I)\| = \|T(k_0,0)\|$, rezultă $\|T(k_0,0)\| < \frac{1}{2}$.

Din (2.4.2) rezultă că exită $k_0 \in \mathbf{N}$ astfel incât $\left\|Q^{\ k_0}\right\| < \frac{1}{2}$. Fie $n \in \mathbf{N}$. Avem $n = k_0 c + r$, unde $c, r \in \mathbf{N}$, $0 \leq r < k_0$ şi $Q^n = (Q^{k_0})^c$ Q^r.

Acum, obţinem $\|Q^{\ n}\| \leq \left\|Q^{\ k_0}\right\|^c \|Q^{\ r}\|$. Luând $a = (\frac{1}{2})^{1/k_0}$ şi $\beta = \max\limits_{r \in \mathbf{N},\, r < k_0} \{2^{r/k_0} \|Q^r\|\}$, rezultă " f) $\Rightarrow$ c)". Deoarece "a) $\Leftrightarrow$ c)" obţinem "f) $\Rightarrow$ a)" şi am demonstrat echivalenţa "a) $\Leftrightarrow$ f)" .

În sfârşit, arătăm că "$a) \Leftrightarrow h)$". Implicaţia "$a) \Rightarrow h)$" rezultă din Propoziţia 2.3.9.

Presupunem că are loc h). Din Teorema 2.3.8 rezultă că există $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât să avem $\langle T(n,0)(I)x, x\rangle \leq \beta a^n \|x\|^2$ pentru toţi $n \geq 0$ şi $x \in H$. Din Lema 2.2.2 rezultă $\|T(n,0)\| \leq \beta a^n$ pentru toţi $n \geq 0$. Acum aplicăm (2.4.2) şi obţinem $\|Q^{\ n}\| \leq \beta a^n$. Avem $\sqrt[n]{\|Q^{\ n}\|} \leq a\beta^{\frac{1}{n}}$ pentru toţi $n \geq 2$. Trecând la limită pentru $n \to \infty$ in ultima inegalitate vedem că $r(Q) \leq a < 1$ şi rezultă e). Acum, folosim implicaţia "e) $\Rightarrow$a)" şi rezultă concluzia $\square$

4.2. Stabilitatea exponenţială uniformă şi ecuaţiile algebrice Lyapunov. Considerăm ecuaţia Lyapunov algebrică

$$P = Q(P) + J \tag{2.4.5}$$

pe spaţiul $\mathcal{E}$, unde Q este operatorul introdus mai sus şi $J \in \mathcal{E}$ este un operator pozitiv.

($J \in \mathcal{E}$ este un operator pozitiv dacă există $\gamma > 0$ astfel incât $J > \gamma I$, unde I este operatorul identic pe H.)

În cazul staţionar Teorema 2.3.20 rămâne valabilă sub forma corolarului următor :

Corolarul 2.4.2. [**71**]*Sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil dacă şi numai dacă ecuaţia (2.4.5) admite o soluţie pozitivă unică.*

Demonstraţie. Dacă (2.4.5) are o soluţie pozitivă este clar că ecuaţia (2.3.15) cu $W_n = J$ are soluţie care indeplineşte condiţia (2.3.16) şi conform Teoremei 2.3.20 rezultă că (2.2.1) este uniform exponenţial stabil.

Reciproc, dacă sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil atunci ecuaţia (2.3.15) cu $W_n = J$ are o soluţie unică care satisface condiţia (2.3.16) dată de relaţia $P_n = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k(J)$. Conform Teoremei 2.4.1 deducem că $r(Q) < 1$ şi acum este uşor de văzut că $P_n = (I-Q)^{-1}(J) \overset{not}{=} P$. Deoarece P_n nu mai depinde de n este clar că P_n este soluţie pozitivă ($P_n \geq J$) a ecuaţiei (2.4.5). Dacă P_1 este o altă soluţie pozitivă a ecuaţiei (2.4.5) atunci este uşor de văzut că aceasta este soluţie a ecuaţiei (2.3.15) care satisface (2.3.16). Aplicăm din nou Teorema 2.3.20 şi rezultă că $P_1 = P$. Demonstraţia este terminată . $\square$

5. Observabilitatea uniformă a sistemelor liniare stocastice discrete

În acest paragraf vom introduce noţiunea de observabilitate uniformă (pentru cazul finit dimensional se poate vedea Definiţia 6 din [**50**]). Propoziţia 2.5.2 stabileşte o caracterizare deterministă a observabilităţii uniforme. Rezultatul principal al acestui paragraf il constituie Teorema 2.5.4 care stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor uniform observabile folosind ecuaţii Lyapunov discrete.

5.1. Observabilitate uniformă. Definiţie şi caracterizare. Considerăm sistemul

$$\left\{ \begin{aligned} x_{n+1} &= A_n x_n + \xi_n B_n x_n \ , \ n \geq k \\ z_n &= C_n x_n, \end{aligned} \right. \tag{2.5.1}$$

unde A_n, B_n şi ξ_n , $n \in \mathbf{N}$ sunt coeficienţii definiţi pentru sistemul (2.2.1) şi $C_n \in L(H, V)$, $n \in \mathbf{N}$ este un şir de operatori liniari şi mărginiţi pe $\mathbf{N}$ (i.e există o constantă pozitivă C astfel incât $\|C_n\| \leq C$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$).

Definiţia 2.5.1. (a se vedea Definiţia 6 din [**50**]) Spunem că (2.5.1) este *uniform observabil* dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ şi $\rho > 0$ astfel incât

$$\sum_{n=k}^{k+n_0} E \left\| C_n X(n,k) x \right\|^2 \geq \rho \left\| x \right\|^2 \tag{2.5.2}$$

pentru toţi $k \in \mathbf{N}$ şi $x \in H$.

Propoziţia 2.5.2. [**69**]*Sistemul (2.5.1) este uniform observabil dacă şi numai dacă există* $n_0 \in \mathbf{N}$ *şi* $\rho > 0$ *astfel incât*

$$\sum_{n=k}^{k+n_0} T(n,k)(C_n^* C_n) \geq \rho I \tag{2.5.3}$$

pentru toţi $k \in \mathbf{N}$ *unde* I *este operatorul identic pe* H.

Demonstraţie. Deoarece

$$E \left\| C_n X(n,k) x \right\|^2 = E \left\langle C_n^* C_n X(n,k) x, X(n,k) x \right\rangle ,$$

se poate folosi Teorema 2.2.4 şi deducem că

$$E \left\| C_n X(n,k) x \right\|^2 = \left\langle T(n,k)(C_n^* C_n) x, x \right\rangle .$$

□

În acest moment este clar că (2.5.2) este echivalent cu (2.5.3)

5.2. Stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor uniform observabile . Considerăm ecuaţia Lyapunov

$$P_n = Q_n(P_{n+1}) + F_n, \tag{2.5.4}$$

unde Q_n este operatorul definit de (2.2.5) iar $F_n \in L^+(H)$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Inainte de a stabili rezultatul principal al acestui paragraf avem nevoie de lema următoare.

Lema 2.5.3. [**69**]*a) Ecuaţia (2.5.4) are o soluţie nenegativă dacă şi numai dacă seria* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(F_k)$ *este tare convergentă pentru orice* $n \geq 0$.

b) Ecuaţia (2.5.4) are o soluţie nenegativă mărginită pe $\mathbf{N}$ *dacă şi numai dacă există* $\alpha > 0$ *astfel incât* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(F_k) \leq \alpha I$ *oricare ar fi* $n \geq 0$ *(*I *este operatorul identic pe* H*). În plus, dacă inegalitatea de mai sus are loc atunci* $W_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(F_k)$ *este o soluţie mărginită a ecuaţiei (2.5.4).*

Demonstraţie. a) Dacă ecuaţia (2.5.4) are o soluţie nenegativă atunci deducem că

$$P_k = T(n+1,k)(P_{n+1}) + \sum_{l=k}^{n} T(l,k)(F_l) \tag{2.5.5}$$

oricare ar fi $n \geq k$. Deci $W_n = \sum\limits_{l=k}^{n} T(l,k)(F_l) \leq P_k$ pentru toţi $n \geq k$, ceea ce inseamnă că pentru k fixat şirul de operatori nenegativi $\{W_n\}$ este monoton crescător şi mărginit superior. Atunci şirul W_n este tare convergent la un operator $W \leq P_k$, $W = \sum\limits_{l=k}^{\infty} T(l,k)(F_l)$. Prima implicaţie a fost demonstrată.

Reciproc , dacă seria $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(F_k)$ este tare convergentă atunci pentru orice $x \in H$ avem

$$\left\langle Q_n(\sum_{k=n+1}^{\infty} T(k,n+1)(F_k))x, x \right\rangle + \langle F_n x, x\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{k=n+1}^{\infty} T(k,n+1)(F_k)A_n x, A_n x \right\rangle +$$

$$+b_n \left\langle \sum_{k=n+1}^{\infty} T(k,n+1)(F_k)B_n x, B_n x \right\rangle + \langle F_n x, x\rangle =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle Q_n(T(k,n+1)(F_k))x, x\rangle + \langle F_n x, x\rangle =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \langle (T(k,n)(F_k))x, x\rangle = \left\langle \sum_{k=n}^{\infty} T(k,n)(F_k)x, x \right\rangle .$$

Deci $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(F_k)$ este o soluţie nenegativă a ecuaţiei (2.5.4).

b) Dacă ecuaţia (2.5.4) are o soluţie nenegativă P_n mărginită pe $\mathbf{N}$ atunci conform demonstraţiei punctului a) avem $\sum\limits_{l=k}^{\infty} T(l,k)(F_l) \le P_n \le \alpha I$ şi rezultă concluzia. Reciproca rezultă conform ipotezei şi punctului a). $\square$

Fie ecuaţia Lyapunov

$$P_n = Q_n(P_{n+1}) + C_n^* C_n \tag{2.5.6}$$

Teorema 2.5.4. [**69**]*Dacă sistemul (2.5.1) este uniform observabil atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil.

b) ecuaţia (2.5.6) are o soluţie nenegativă şi mărginită pe $\mathbf{N}$.

c) ecuaţia (2.5.6) are o unică soluţie nenegativă şi mărginită pe $\mathbf{N}$ *care satisface condiţia (2.3.17).*

Demonstraţie. "$a) \Rightarrow b$".Este suficient să observăm că există $\alpha > 0$ astfel incât $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C_k^* C_k) \leq \alpha I$ oricare ar fi $n \geq 0$. Deoarece $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \| T(k,n)(C_k^* C_k)\| \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \| T(k,n)\| \, \|C_k^* C_k\|$ aplicăm Teorema 2.3.7 şi conform ipotezei rezultă că $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \| T(k,n)(C_k^* C_k)\| \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \beta a^{n-k} \, \|C_k^* C_k\| \leq C^2 \frac{\beta}{1-a}$, unde$\|C_k\| \leq C$ pentru toţi $k \in \mathbf{N}$.

Astfel putem deduce că $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C_k^* C_k)$ este uniform convergentă in spaţiul operatorilor autoadjunţi şi $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C_k^* C_k) \leq C^2 \frac{\beta}{1-a} I$, unde I este operatorul identic pe H. Acum aplicăm punctul b) al Lemei 2.5.3 şi rezultă concluzia.

"$b) \Rightarrow a$". Din lema de mai sus (punctul b)) rezultă că seria $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C_k^* C_k)$ este tare convergentă şi reprezintă o soluţie mărginită a ecuaţiei (2.5.6). Fie n_0, ρ constantele care intervin in Definiţia 2.5.1.

Dacă notăm $W_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C_k^* C_k)$ atunci din observabilitatea uniformă a sistemului (2.5.1) şi afirmaţia de mai sus rezultă că există $\alpha \geq 0$ astfel incât

$$\alpha I \geq W_n \geq \rho I \tag{2.5.7}$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. Dacă $L_p, p \in \mathbf{N}$ este un şir monoton crescător, tare convergent la operatorul L atunci, deoarece $Q_k(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, rezultă că $Q_k(L_p)$ este tare convergent (când $p \to \infty$) la operatorul $Q_k(L)$.

Ţinând cont de cele spuse mai sus şi de definiţia operatorului $T(n,k)$ rezultă că avem

$$T(n+n_0+1,n)(W_{n+n_0+1}) = \tag{2.5.8}$$

$$= \lim_{p\to\infty} T(n+n_0+1,n) \sum_{k=n+n_0+1}^{p} T(k,n+n_0+1)(C_k^*C_k) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{k=n+n_0+1}^{p} T(k,n)(C_k^*C_k) = \sum_{k=n+n_0+1}^{\infty} T(k,n)(C_k^*C_k).$$

Obţinem $T(n+n_0+1,n)(W_{n+n_0+1}) = \sum\limits_{k=n+n_0+1}^{\infty} T(k,n)(C_k^*C_k) =$

$= W_n - \sum\limits_{k=n}^{n+n_0+1} T(k,n)(C_k^*C_k) \le W_n - \rho I$.

Conform (2.5.7) avem $T(n+n_0+1,n)(W_{n+n_0+1}) \le W_n - \frac{\rho}{\alpha}W_n$.

Deci $T(n+n_0+1,n)(W_{n+n_0+1}) \le qW_n$ unde $q \in [0,1)$. Putem resupune, fără a restrânge generalitatea că $q \in (0,1)$.

Fie $m \in \mathbf{N}$. Atunci, conform teoremei impărţirii cu rest, există $c, r \in \mathbf{N}$ astfel incât $m = (n_0+1)c + r, 0 \le r \le n_0$. Folosind inducţia şi ultima inegalitate obţinem

$T(m,n)(W_m) \le q^c T(n+r,n)(W_{n+r}) \le q^c W_n$.

Din (2.5.7) şi faptul că $T(n,k)(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ oricare ar fi $0 \le k \le n$ avem $\rho T(m,n)(I) \le q^{\frac{m-n}{n_0+1}} q^{\frac{-r}{n_0+1}} \alpha I$. Astfel, luăm $\beta = q^{\frac{-n_0}{n_0+1}}\alpha/\rho$ şi $a = q^{\frac{1}{n_0+1}}$ şi având in vedere Lema 2.2.2, Teorema 2.3.7 şi Definiţia 2.3.1, rezultă concluzia.

Deoarece implicaţia "$c) \Rightarrow b)$" este evidentă, vom demonstra "$a) \Rightarrow c)$". Din "$a) \Rightarrow b)$" rezultă că $\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C_k^*C_k)$ este o soluţie mărginită a ecuaţiei (2.5.6) care datorită observabilităţii uniforme a sistemului (2.5.1) $\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C_k^*C_k) \ge \rho I\right)$ satisface condiţia (2.3.17). Pentru a demonstra unicitatea presupunem că P_n şi R_n sunt două soluţii ale ecuaţiei (2.5.6) care satisfac (2.3.17).

Atunci avem succesiv $P_n - R_n = Q_n(P_{n+1} - R_{n+1})$,

$P_n - R_n = T(n+k,n)(P_{n+k} - R_{n+k})$. Conform relaţiei (2.3.17) avem

$\|P_{n+k} - R_{n+k}\| \leq \|P_{n+k}\| + \|R_{n+k}\| \leq 2M$ şi

(2.5.9)

$$\|P_n - R_n\| \leq \|T(n+k,n)\| \, \|P_{n+k} - R_{n+k}\| \leq 2M \, \|T(n+k,n)\|$$

Aplicăm ipoteza şi Teorema 2.3.7 şi rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} \|T(n+k,n)\| = 0$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$. Trecem la limită pentru $k \to \infty$ in (2.5.9) şi deducem $P_n = R_n$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$. Demonstraţia este completă. $\square$

Cazul staţionar

În această secţiune presupunem că $A_n = A$, $B_n = B$, $b_n = b$ şi $C \in L(H)$ şi considerăm ecuaţia algebrică Lyapunov

$$P = Q(P) + C^*C \tag{2.5.10}$$

În acest caz avem următoarea caracterizare a stabilităţii exponenţiale uniforme a sistemelor uniform observabile.

Corolarul 2.5.5. [**69**]*Dacă (2.5.1) este uniform observabil atunci sistemul (2.2.1) este uniform exponenţial stabil dacă şi numai dacă ecuaţia (2.5.10) admite o soluţie pozitivă unică.*

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Deoarece in acest caz şirul C^*C fiind constant este mărginit putem deduce conform Teoremei 2.5.4 şi punctului b) al Lemei 2.5.3 că ecuaţia (2.5.6) are soluţia $P_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} T(k,n)(C^*C)$ şi P_n este mărginită pe $\mathbf{N}$. Conform (2.4.2) şi Teoremei 2.4.4 rezultă că $P_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q^k(C^*C) = (I-Q)^{-1}(C^*C) \overset{not}{=} P$ nu depinde de n şi in consecinţă este soluţie a ecuaţiei algebrice (2.5.10). În plus, din ipoteza referitore la uniform observabilitatea sistemului (2.5.1) rezultă ca are loc (2.3.17) şi deci P este pozitivă . Pentru a demonstra unicitatea considerăm P_1 o altă soluţie pozitivă a ecuaţiei (2.5.10). Atunci aceasta este soluţie a ecuaţiei (2.5.6) şi, conform Teoremei 2.5.4, rezultă că $P_1 = P$.

" $\Leftarrow$ " Dacă (2.5.10) admite o soluţie pozitivă unică atunci este clar că aceasta este soluţie mărginită pentru (2.5.6) şi, conform Teoremei 2.5.4, rezultă concluzia. $\square$

6. Ecuaţia Riccati discretă asociată controlului stocastic

Presupunem că avem indeplinită ipoteza de mai jos, peste tot in acest paragraf.

H_1: Şirurile A_n, $B_n \in L(H)$, $D_n \in L(U,H)$, $C_n \in L(V,H)$, $K_n \in L(U)$ şi b_n sunt mărginite pe $\mathbf{N}$.

Considerăm sistemul cu control, asociat lui (2.2.1)

$$\left\{\begin{array}{c} x_{n+1} = A_n x_n + \ \xi_n B_n x_n + D_n u_n \\ x_k = x \ , \ k \in \mathbf{N} \end{array}\right. \tag{2.6.1}$$

unde $D_n \in L(U,H)$ şi controlul $\{u_k, u_{k+1}, ...\}$ aparţine clasei $\widetilde{U}_{k,x}$ definită de proprietatea că u_n, $n \geq \ k$ sunt variabile aleatoare cu valori in U, măsurabile in raport cu $\sigma-$ algebra $\mathcal{F}_n$ generată de $\{\xi_i, 0 \leq i \leq n-1\}$ şi $\sup\limits_{n \geq k} E\left\|u_n\right\|^2 < \infty$.

Lema 2.6.1. *(pentru cazul finit dimensional se poate vedea* [**52**]*). Soluţia $x_j = x_j(x, k\ ; u)$ a lui (2.6.1) satisface ecuaţia*

$$x_j(x,k;u) = X(j,k)x + \sum_{i=k}^{j-1} X(j,i+1) D_i u_i \tag{2.6.2}$$

pentru $j \geq \ k+1$. Mai mult , x_j este $\mathcal{F}_j-$ măsurabilă şi ξ_j -independentă.

Demonstraţie. Este uşor de verificat prin inducţie, că are loc (2.6.2).

Pentru $j = k+1$, este evident că (2.6.2) este adevărată .

Presupunem că (2.6.2) are loc pentru $j = n$ şi demonstrăm afirmaţia pentru $j = n+1$.

Din ipoteza de inducţie deducem că $x_n = X(n,k)x + \sum_{i=k}^{n-1} X(n,i+1)D_i u$. Calculând, avem

$x_{n+1} = (A_n + \xi_n B_n)x_n + D_n u_n =$
$= (A_n + \xi_n B_n)(X(n,k)x + \sum_{i=k}^{n-1} X(n,i+1)D_i u_i\ ) + D_n u_n =$
$= X(n+1,k)x + \sum_{i=k}^{n-1} X(n+1,i+1)D_i u_i\ + D_n u_n =$
$= X(n+1,k)x + \sum_{i=k}^{n} X(n+1,i+1)D_i u_i$ şi rezultă că (2.6.2) are loc pentru $j = n+1$. Deoarece u_i este $\mathcal{F}_i-$ măsurabilă, este clar că $D_i u_i$ este $\mathcal{F}_i-$ măsurabilă şi aplicăm Lema 1.3.1 pentru a deduce că $X(n+1,i+1)D_i u_i$ este $\mathcal{F}_{n+1}-$ măsurabilă . Raţionând in mod asemănător rezultă că $X(n+1,k)x$ este $\mathcal{F}_{n+1}-$ măsurabilă . În consecinţă, x_{n+1} este $\mathcal{F}_{n+1}-$ măsurabilă. Inducţia este completă. Deoarece ξ_j este $\mathcal{F}_j-$ independentă şi x_j este $\mathcal{F}_j-$ măsurabilă deducem că x_j şi ξ_j sunt independente. Demonstraţia este terminată . $\square$

Asociem sistemului (2.6.1) următorul cost pătratic:

$$I_k(x,u) = E\sum_{n=k}^{\infty}[\|C_n x_n\|^2 + \langle K_n u_n, u_n\rangle], \tag{2.6.3}$$

unde x_n este soluţia lui (2.6.1), $K_n \geq \delta I, \delta > 0$, pentru toţi $n \in \mathbf{N}$, I este operatorul identic pe U şi controlul $\{u_k, u_{k+1}, ...\}$ aparţine clasei $U_{k,x}$. Prin $U_{k,x}$ notăm mulţimea tuturor şirurilor infinite $\{u_k, u_{k+1}, ...\}$, u_i sunt variabile aleatoare cu valori in U, $i = k, k+1...$, măsurabile in raport cu $\mathcal{F}_i$ care au proprietatea că $E\|u_i\|^2 < \infty$ şi $I_k(x,u) < \infty$.

Definim transformarea $\mathcal{G}_n : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$,

$$\mathcal{G}_n(S) = A_n^* S D_n (K_n + D_n^* S D_n)^{-1} D_n^* S A_n.$$

Dacă $S \in \mathcal{K}$ atunci este uşor de văzut că $D_n^* S D_n \in \mathcal{K}$. Deoarece K_n satisface condiţia $K_n \geq \delta I$, $\delta > 0$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$, avem $K_n + D_n^* S D_n \geq K_n \geq \delta I$. Acum este clar că $K_n + D_n^* S D_n$ este inversabil (a se vedea Corolarul 4.9 din [**14**]) şi $(K_n + D_n^* S D_n)^{-1}$ este nenegativ.

Pentru toţi $x \in H$ avem

$$\langle \mathcal{G}_n(S)x, x \rangle = \big\langle (K_n + D_n^* S D_n)^{-1} D_n^* S A_n x, D_n^* S A_n x \big\rangle \geq 0.$$

De aici rezultă că $\mathcal{G}_n$ este bine definit .

Considerăm pe $\mathcal{K}$ următoarea ecuaţie Riccati asociată costului (2.6.3)

$$R_n = A_n^* R_{n+1} A_n + b_n B_n^* R_{n+1} B_n + C_n^* C_n - \mathcal{G}_n(R_{n+1}) \tag{2.6.4}$$

În cele ce urmează avem nevoie de câteva definiţii ce vor fi introduse mai jos (a se vedea D.2, D.3, in [**50**]).

Observaţia 2.6.2. *Dacă vom folosi notaţia* $\{A; B\}$ *pentru sistemul (2.2.1) atunci vom spune că* $\{A; B\}$ *este uniform exponenţial stabil dacă şi numai dacă (2.2.1) este uniform exponenţial stabil.*

Definiţia 2.6.3. Sistemul (2.6.1) este *stabilizabil* dacă există şirul de operatori $F = \{F_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $F_n \in L(H, U)$, mărginit pe $\mathbf{N}$ astfel incât $\{A + DF; B\}$ este uniform exponenţial stabil.

Definiţia 2.6.4. Soluţia $R = (R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a ecuaţiei Riccati (2.6.4) se numeşte *stabilizantă* pentru (2.6.1) dacă sistemul $\{A + DF; B\}$ unde

$$F_n = -(K_n + D_n^* R_{n+1} D_n)^{-1} D_n^* R_{n+1} A_n, \tag{2.6.5}$$

$n \in \mathbf{N}$ este uniform exponenţial stabil.

Ca şi in cazul continuu ([**51**]) se poate demonstra propoziţia :

Propoziţia 2.6.5. *Ecuaţia Riccati (2.6.4) are cel mult o soluţie stabilizantă și mărginită pe* $\mathbf{N}$.

Demonstraţie. Fie $R_{n,1}$ şi $R_{n,2}$ două soluţii stabilizabile şi mărginite pe $\mathbf{N}$ ale ecuaţiei (2.6.4).

Introducem sistemele

$$
\left\{\begin{array}{c} x_{n+1,i} = (A_n + D_n F_{n,i})x_{n,i} + \xi_n B_n x_{n,i} \\ x_{k,i} = x \in H \end{array}\right. \tag{2.6.6}
$$

pentru toţi $n \geq k$, $n, k \in \mathbf{N}$, unde

$F_{n,i} = -(K_n + D_n^* R_{n+1,i} D_n)^{-1} D_n^* R_{n+1,i} A_n$, $i = 1, 2$.

Un calcul direct arată că $Q_n = R_{n,1} - R_{n,2}$ este soluţia ecuaţiei

(2.6.7)
$$
Q_n = A_n^* Q_{n+1} A_n + b_n B_n^* Q_{n+1} B_n + A_n^* R_{n+1,1} D_n F_{n,1} - F_{n,2}^* D_n^* R_{n+1,2} A_n .
$$

Pe de altă parte,

$$
E \left\langle Q_{n+1} x_{n+1,1}, x_{n+1,2} \right\rangle =
$$

$$
= E \left\langle Q_{n+1}[(A_n + D_n F_{n,1})x_{n,1} + \xi_n B_n x_{n,1}], (A_n + D_n F_{n,2})x_{n,2} + \xi_n B_n x_{n,2} \right\rangle .
$$

Deoarece $x_{n,i}$ şi ξ_n, $i = 1, 2$ sunt variabile aleatoare independente (ca o consecinţă Lemei 1.3.1) pentru toţi $n \in$ **N**, rezultă

$$E\left\langle Q_{n+1}x_{n+1,1}, x_{n+1,2}\right\rangle = E\left\langle (A_n + D_nF_{n,2})^*Q_{n+1}(A_n + D_nF_{n,1})x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$b_nE\left\langle B_n^*Q_{n+1}B_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle = E\left\langle A_n^*Q_{n+1}A_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$+ b_nE\left\langle B_n^*Q_{n+1}B_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$+ E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*Q_{n+1}A_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$+ E\left\langle A_n^*Q_{n+1}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$+ E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*Q_{n+1}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle.$$

Din (2.6.7) deducem că

$$E\left\langle Q_{n+1}x_{n+1,1}, x_{n+1,2}\right\rangle =$$

$$E\left\langle Q_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle - E\left\langle A_n^*R_{n+1,1}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$+ E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*R_{n+1,2}A_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle + E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*Q_{n+1}A_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$+E\left\langle A_n^*Q_{n+1}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle + E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*Q_{n+1}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle.$$

Putem scrie

$$E\left\langle Q_{n+1}x_{n+1,1}, x_{n+1,2}\right\rangle =$$

$$E\left\langle Q_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle - E\left\langle A_n^*R_{n+1,2}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$

$$+E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*R_{n+1,1}A_nx_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle + E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*Q_{n+1}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle.$$

Datorită faptului că

$$E\left\langle F_{n,2}^*D_n^*Q_{n+1}D_nF_{n,1}x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle =$$

$E\left\langle F_{n,2}^* D_n^* R_{n+1,1} D_n F_{n,1} x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle - E\left\langle F_{n,2}^* D_n^* R_{n+1,2} D_n F_{n,1} x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle =$

$$- E\left\langle F_{n,2}^* D_n^* R_{n+1,1} A_n x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle - E\left\langle F_{n,2}^* K_n F_{n,1} x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle +$$
$$E\left\langle A_n D_n^* R_{n+1,2} D_n F_{n,1} x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle + E\left\langle F_{n,2}^* K_n F_{n,1} x_{n,1}, x_{n,2}\right\rangle$$

obţinem $E\langle Q_{n+1} x_{n+1,1}, x_{n+1,2}\rangle = E\langle Q_n x_{n,1}, x_{n,2}\rangle$ pentru toţi $n \geq k$.

Este uşor de văzut că $E\langle Q_{n+1} x_{n+1,1}, x_{n+1,2}\rangle = E\langle Q_k x_{k,1}, x_{k,2}\rangle = \langle Q_k x, x\rangle$ pentru toţi $n \geq k$, $x \in H$.

Avem $\|Q_{n+1}\| \leq \|R_{n+1,1}\| + \|R_{n+1,2}\| \leq M$, unde $M = M_1 + M_2$ iar $M_i \in \mathbf{R}_+$, $i = 1,2$ sunt astfel incât $\|R_{n+1,i}\| \leq M_i$, pentru toţi $n \in \mathbf{N}$.

($M_i, i = 1,2$ există datorită faptului că $R_{n+1,i}$ sunt mărginiţi pe $\mathbf{N}$).

Astfel , $0 \leq |\langle Q_k x, x\rangle| \leq \|Q_{n+1}\| E\|x_{n+1,1}\| \|x_{n+1,2}\| \leq$
$\leq M\sqrt{E\|x_{n+1,1}\|^2 E\|x_{n+1,2}\|^2}$.

Conform ipotezei şi Definiţiei 2.6.4 este clar că sistemele (2.6.6) sunt uniform exponenţial stabile şi $E\|x_{n+1,i}\|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $i = 1,2$.

Astfel , trecem la limită pentru $n \to \infty$ in ultima inegalitate şi obţinem $\langle Q_k x, x\rangle = 0$. Cum, x este arbitrar şi $Q_k \in \mathcal{E}$, deducem că $Q_k = 0$ şi $R_{k,1} = R_{k,2}$ pentru toţi $k \in \mathbf{N}$.

Demonstraţia este completă. $\square$

Fie x_n soluţia sistemului (2.6.1) şi $M \in \mathbf{N}^*$. Notăm cu $U_{k,M}$ mulţimea tuturor şirurilor finite $u_k^M = \{u_k, u_{k+1}, ...u_{M-1}\}$ formate din variabilele aleatoare u_i cu valori in U, $i = k, ..., M-1$, care au proprietatea că u_i este măsurabilă in raport cu $\mathcal{F}_i$ şi $E\|u_i\|^2 < \infty$.

Acum introducem costul

$$V(M,k,x,u) = E\sum_{n=k}^{M-1}[\|C_n x_n\|^2 + \langle K_n u_n, u_n\rangle].$$

Fie $R(M,M) = 0 \in \mathcal{K}$ şi $R(M,n)$ definit de formula

$R(M,n) = A_n^* R(M,n+1)A_n + b_n^* B_n R(M,n+1)B_n + C_n^* C_n - \mathcal{G}_n(R(M,n+1))$ pentru toţi $n \leq M-1$ pentru care $R(M,n+1) \in \mathcal{K}$. Este uşor de văzut că $R(M,M-1)$ există.

Lema următoare ne asigură că $R(M,n)$ există pentru toţi n care satisfac inegalitatea $0 \leq n \leq M$.

Din definiţia lui $\mathcal{G}_n$ se vede că $R(M,n), n < M$ există dacă $R(M,n+1) \in \mathcal{K}$. De aici rezultă că este suficient să arătăm că $R(M,n) \in \mathcal{K}$ pentru toţi $0 < n \leq M-1$.

Lema 2.6.6. *$R(M,n) \in \mathcal{K}$ pentru toţi $0 \leq n \leq M$ şi*

$$0 \leq R(M-1,n) \leq R(M,n)$$

pentru toţi $0 \leq n \leq M-1$.

Demonstraţie. Vom demonstra prima afirmaţie folosind inducţia. Pentru $n = M$, $R(M,n) = 0 \in \mathcal{K}$.

Presupunem că $R(M,n) \in \mathcal{K}$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$, $k < n \leq M$. Vom demonstra că $R(M,k) \in \mathcal{K}$.

Fie x_n soluţia sistemului (2.6.1) cu condiţia iniţială $x_k = x$, unde k este cel considerat mai sus .

Sistemul de variabile aleatoare $\{x_n, u_n\}$ este independent de ξ_n conform Lemei 2.6.1 şi deoarece $E(\xi_n) = 0$, avem

$E\langle R(M,n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle =$
$= E\langle R(M,n+1)(A_n x_n + \xi_n B_n x_n + D_n u_n), (A_n x_n + \xi_n B_n x_n + D_n u_n)\rangle$
$= E\langle A_n^* R(M,n+1)A_n x_n, x_n\rangle + b_n\langle B_n^* R(M,n+1)B_n x_n, x_n\rangle +$
$+E\langle D_n^* R(M,n+1)A_n x_n, u_n\rangle + E\langle A_n^* R(M,n+1)D_n u_n, x_n\rangle +$
$+E\langle D_n^* R(M,n+1)D_n u_n, u_n\rangle$ pentru toţi $k \leq n \leq M-1$.

Folosind definiţia lui $R(M,n)$, obţinem

$$\begin{aligned} E\left\langle R(M,n+1)x_{n+1},x_{n+1}\right\rangle = E\left\langle R(M,n)x_n,x_n\right\rangle - \left\langle C_n^*C_nx_n,x_n\right\rangle + \\ \left\langle \mathcal{G}_n(R(M,n+1))x_n,x_n\right\rangle + \\ 2E\left\langle D_n^*R(M,n+1)A_nx_n,u_n\right\rangle + \\ E\left\langle D_n^*R(M,n+1)D_nu_n,u_n\right\rangle. \end{aligned}$$

Notăm cu z_n expresia

$$u_n + (K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n)^{-1}D_n^*R(M,n+1)A_nx_n.$$

Calculând, avem

$\left\langle [K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n]z_n,z_n\right\rangle =$

$= E\left\langle [K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n]u_n,u_n\right\rangle + 2E\left\langle D_n^*R(M,n+1)A_nx_n,u_n\right\rangle +$

$+E\left\langle D_n^*R(M,n+1)A_nx_n,(K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n)^{-1}D_n^*R(M,n+1)A_nx_n\right\rangle$

sau echivalent

$\left\langle [K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n]z_n,z_n\right\rangle =$

$E\left\langle [K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n]u_n,u_n\right\rangle + 2E\left\langle u_n,D_n^*R(M,n+1)A_nx_n\right\rangle +$

$+E\left\langle \mathcal{G}_n(R(M,n+1))x_n,x_n\right\rangle$.

Astfel, putem scrie

$$E\left\langle R(M,n+1)x_{n+1},x_{n+1}\right\rangle =$$

$$= E\left\langle R(M,n)x_n,x_n\right\rangle - E\left\langle C_n^*C_nx_n,x_n\right\rangle - E\left\langle K_nu_n,u_n\right\rangle +$$

$$+E\left\langle (K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n)z_n,z_n\right\rangle.$$

Acum, considerăm ultima egalitate pentru $n = k, k+1, ...M-1$ şi insumând, avem

$E\left\langle R(M,M)x_M,x_M\right\rangle = E\left\langle R(M,k)x_k,x_k\right\rangle - V(M,k,x,u) +$

$+E\sum\limits_{n=k}^{M-1}\left\langle (K_n + D_n^*R(M,n+1)D_n)z_n,z_n\right\rangle.$

Din cauza faptului că $R(M,M)=0$ şi deoarece $x_k = x$ obţinem :

(2.6.8)

$$V(M,k,x,u)=\langle R(M,k)x,x\rangle + E\sum_{n=k}^{M-1}\langle (K_n + D_n^* R(M,n+1)D_n)z_n, z_n\rangle$$

Fie $\widetilde{x}_n$ soluţia sistemului

$$\left\{\begin{array}{c} x_{n+1}=(A_n+D_nF_n)x_n+\xi_n B_n x_n \\ x_k = x \in H \end{array}\right. , \tag{2.6.9}$$

unde $F_n = -[K_n + D_n^* R(M,n+1)D_n]^{-1} D_n^* R(M,n+1)A_n$.

Este clar că $\widetilde{x}_n$ este soluţie a lui (2.6.1) cu $\widetilde{u}_n = F_n\widetilde{x}_n$, $k\le n\le M-1$.

Din Lema 1.3.1 rezultă că $\widetilde{x}_n$ este măsurabilă cu raport $\mathcal{F}_n$, $\{\widetilde{x}_n,\xi_n\}$ sunt independente şi $E\left\|\widetilde{x}_n\right\|^2<\infty$, $k\le n\le M-1$; de aici deducem $\{\widetilde{u}_n, k\le n\le M-1\}\in U_{k,M}$.

Deoarece $R(M,n)\ge 0$ pentru fiecare $k<n\le M$, obţinem

$K_n + D_n^* R(M,n+1)D_n\ge 0$ şi dacă notăm

$$S_{k,M}(u_k^M)=E\sum_{n=k}^{M-1}\langle (K_n + D_n^* R(M,n+1)D_n)z_n, z_n\rangle ,$$

avem $S_{k,M}(u_k^M)\ge 0$ pentru toţi $k\le n\le M-1$. Este evident că avem $S_{k,M}(\widetilde{u}_k^M)=0$.

Astfel , deducem că

$$\min_{u\in U_{k,M}} V(M,k,x,u)=\min_{u\in U_{k,M}}\{\langle R(M,k)x,x\rangle + S_{k,M}(u_k^M)\} =$$
$$=\langle R(M,k)x,x\rangle + \min_{u\in U_{k,M}} S_{k,M}(u_k^M).$$

Dar $\min_{u\in U_{k,M}} S_{k,M}(u_n^M) = S_{k,M}(\widetilde{u}_k^M)=0$ şi atunci avem

$$\langle R(M,k)x,x\rangle = \min_{u\in U_{k,M}} V(M,k,x,u).$$

Deoarece $V(M,k,x,u)\ge 0$ pentru toţi $u_k^M\in U_{k,M}$, rezultă că

$$\langle R(M,k)x,x\rangle\ge 0.$$

Cum x este arbitrar , obţinem $R(M,k) \geq 0$ şi inducţia este completă .

Astfel deducem că şirul $R(M,n)$ este bine definit pentru toţi $0 \leq n \leq M$. Spunem că el este soluţia ecuaţiei Riccati (2.6.4) cu condiţia finală $R(M,M) = 0$.

În conformitate cu (2.6.8) şi datorită faptului că $R(M,n) \geq 0$, pentru toţi $0 \leq n \leq M$ obţinem

$$\min_{u \in U_{k,M}} V(M,k,x,u) = V(M,k,x,\widetilde{u}) = \langle R(M,k)x, x\rangle \tag{2.6.10}$$

pentru toţi $0 \leq k < M-1$. Fie $u_k^{M-1} = \{\widetilde{u}_k, \widetilde{u}_{k+1}, ..., \widetilde{u}_{M-2}\}, M-1 > k$. Este clar că $u_k^{M-1} \in U_{k,M-1}$ şi din definiţia lui $V(M,k,x,u)$ deducem $V(M-1,k,x,u) \leq V(M,k,x,\widetilde{u})$.

Pe de altă parte, dacă considerăm (2.6.10) pentru $M-1$, avem $V(M-1,k,x,u) \geq \min_{u \in U_{k-1,M}} V(M-1,k,x,u) = \langle R(M-1,k)x, x\rangle$ pentru toţi $0 \leq k < M$.

Astfel, se poate scrie

$\langle R(M,k)x, x\rangle = V(M,k,x,\widetilde{u}) \geq \langle R(M-1,k)x, x\rangle$ pentru toţi $x \in H$. Am demonstrat că $R(M,k) \geq R(M-1,k) \geq 0$ pentru toţi $M-1 \geq k \geq 0$. □

Propoziţia 2.6.7. *Presupunem că (2.6.1) este stabilizabil . Atunci ecuaţia Riccati (2.6.4) admite o soluţie nenegativă şi mărginită pe* $\mathbf{N}$.

Demonstraţie. Deoarece (2.6.1) este stabilizabil rezultă că există şirul $F = \{F_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $F_n \in L(H,U)$, mărginit pe $\mathbf{N}$ astfel incât $\{A + DF; B\}$ este uniform exponenţial stabil. Atunci există $a \in (0,1)$ şi $\beta \geq 1$ astfel incât $E\left\|x_n(k,x)\right\|^2 \leq \beta a^{n-k}\left\|x\right\|^2$, pentru toţi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$.

Fie $\overline{u}_n = F_n x_n$, unde x_n este soluţia lui $\{A + DF; B\}$ cu condiţia iniţială $x_k = x$. Deoarece F_n este mărginit pe $\mathbf{N}$, este uşor de văzut că $\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{k,x}$.

Avem

$$\begin{aligned} V(M,k,x,\overline{u}) &= E\sum_{n=k}^{M-1}[\|C_n x_n\|^2 + \langle K_n \overline{u}_n, \overline{u}_n\rangle] = \\ &= E\sum_{n=k}^{M-1}[\|C_n x_n\|^2 + \langle K_n F_n x_n, F_n x_n\rangle] \leq \\ &\leq \sum_{n=k}^{M-1}(\widetilde{C}^2 + \widetilde{K}\widetilde{F}^2)E\,\|x_n\|^2 \end{aligned}$$

pentru toţi $M-1 \geq k$,unde $\widetilde{C}=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\|C_n\|$, $\widetilde{F}=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\|F_n\|$ şi $\widetilde{K}=\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\|K_n\|$.

Pentru $M-1 \geq k \geq 0$ avem

$$\begin{aligned} V(M,k,x,\overline{u}) &\leq \sum_{n=k}^{\infty}(\widetilde{C}^2 + \widetilde{K}\widetilde{F}^2)E\,\|x_n\|^2 \leq \\ &\leq (\widetilde{C}^2 + \widetilde{K}\widetilde{F}^2)\sum_{n=k}^{\infty}\beta a^{n-k}\|x\|^2 = \lambda\|x\|^2 \end{aligned}$$

,cu $\lambda = \frac{(\widetilde{C}^{\,2}+\widetilde{K}\,\widetilde{F}^2)\,\beta}{1-a}$. Deci $V(M,k,x,\overline{u}) \leq \lambda\|x\|^2$, pentru toţi $M > k$.

Dacă $R(M,n)$ este soluţia ecuaţiei Riccati (2.6.4), $R(M,M) = 0$ atunci

$\lambda\|x\|^2 \;\geq\; V(M,k,x,\overline{u}) \;\geq\; \min\limits_{u\in U_{k,M}} V(M,k,x,u) \;=\; \langle R(M,k)x, x\rangle$, pentru toţi $M > k \geq 0$. Din Lema 2.6.6 şi ultima inegalitate avem $\lambda I \geq R(M,k) \geq R(M-1,k) \geq 0$ pentru toţi $M-1 \geq k \geq 0$.

Conform Propoziţiei 4.64 din [**14**], rezultă că există $R(k) \in L(H)$ astfel incât

$$0 \leq R(M,k) \leq R(k) \leq \lambda I \tag{2.6.11}$$

pentru $M \in \mathbf{N}$, $M > k$ iar şirul $\{R(M,k)\}_{M\in\mathbf{N},M\geq k}$ converge tare la $R(k)$.

Notăm $L = \lim\limits_{M\to\infty}(\langle \mathcal{G}_n(R(M,n+1))x,x\rangle - \langle \mathcal{G}_n(R(n+1))x,x\rangle)$ şi $P_{M,n} = K_n + D_n^* R(M,n+1)D_n$, $P_n = K_n + D_n^* R(n+1)D_n$. Folosind definiţia lui $\mathcal{G}_n$ obţinem succesiv

$$L=\lim_{M\to\infty}(\left\langle P_{M,n}^{-1}D_n^*R(M,n+1)A_nx,D_n^*R(M,n+1)A_nx\right\rangle -$$
$$\left\langle P_n^{-1}D_n^*R(n+1)A_nx,D_n^*R(n+1)A_nx\right\rangle)=$$
$$\lim_{M\to\infty}(\left\langle\left(P_{M,n}^{-1}-P_n^{-1}\right)D_n^*R(n+1)A_nx,D_n^*R(n+1)A_nx\right\rangle +$$

$$\left\langle P_{M,n}^{-1}D_n^*\left[R(M,n+1)-R(n+1)\right]A_nx,D_n^*\left[R(M,n+1)+R(n+1)\right]A_nx\right\rangle).$$

Atunci avem

$$L\leq\lim_{M\to\infty}(\left\langle\left(P_{M,n}^{-1}-P_n^{-1}\right)D_n^*R(n+1)A_nx,D_n^*R(n+1)A_nx\right\rangle +$$
$$\left\|P_{M,n}^{-1}\right\|\left\|D_n^*R(M,n+1)A_nx-D_n^*R(n+1)A_nx\right\|\cdot$$
$$\left\|D_n^*R(M,n+1)A_nx+D_n^*R(n+1)A_nx\right\|).$$

Folosim notaţiile
$L_1=\lim\limits_{M\to\infty}\left\|P_{M,n}^{-1}\right\|\left\|D_n^*R(M,n+1)A_nx-D_n^*R(n+1)A_nx\right\|\cdot$
$\left\|D_n^*R(M,n+1)A_nx+D_n^*R(n+1)A_nx\right\|$ şi
$L_2=\lim\limits_{M\to\infty}\left\langle\left(P_{M,n}^{-1}-P_n^{-1}\right)D_n^*R(n+1)A_nx,D_n^*R(n+1)A_nx\right\rangle.$

Deoarece $P_{M,n}\geq K_n\geq\delta I$, $\delta>0$ deducem că $\left\|P_{M,n}^{-1}\right\|\leq\frac{1}{\delta}$ pentru toţi $M\geq n+1\geq k$ (a se vedea teorema T.1.14.3 din [**33**]) şi având in vedere relaţia (2.6.11), marginirea pe $\mathbf{N}$ a şirurilor D_n şi A_n precum şi convergenţa tare a şirului $\{R(M,n)\}_{M\in\mathbf{N},\,M\geq n}$ rezultă $L_1=0$. Pentru a calcula L_2 ,vedem că $\left\|P_{M,n}^{-1}x-P_n^{-1}x\right\|\leq\left\|P_{M,n}^{-1}\right\|\left\|P_{M,n}y-P_ny\right\|$, unde $y=P_n^{-1}x$.

Deoarece $\lim\limits_{M\to\infty}\left\|P_{M,n}y-P_ny\right\|=0$ obţinem $\lim\limits_{M\to\infty}\left\|P_{M,n}^{-1}x-P_n^{-1}x\right\|=0$.

Acum, este clar că $L_2=0$. De aici $L=0$ şi

$$\lim_{M\to\infty}\left\langle\mathcal{G}_n(R(M,n+1))x,x\right\rangle=\left\langle\mathcal{G}_n(R(n+1))x,x\right\rangle.$$

Având in vedere definiţia lui $R(M,n)$ putem folosi rezultatul de mai sus şi trecând la limită pentru $M \to \infty$ deducem că $R(n)$ este a soluţie a lui (2.6.4). Demonstraţia este completă . $\square$

Teorema 2.6.8. *Presupunem că sistemul (2.5.1) este uniform observabil. Dacă R_n este o soluţie nenegativă şi mărginită pe* $\mathbf{N}$ *a ecuaţiei (2.6.4) atunci:*

a) există $\alpha > 0$ astfel incât $R_n \geq \alpha I$, pentru toţi $n \in$ $\mathbf{N}$ *(R_n este uniform pozitivă).*

b) R_n este stabilizantă pentru (2.6.1).

Demonstraţie. Idea principală este preluată din [**50**] . Fie R_n o soluţie nenegativă şi mărginită pe $\mathbf{N}$ a ecuaţiei (2.6.4) şi fie $\widetilde{X}(n,k)$ operatorul de evoluţie aleator asociat sistemului

$$\left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = (A_n + D_n F_n)x_n + \xi_n B_n x_n \\ x_k = x \in H \end{array} \right. \tag{2.6.12}$$

pentru toţi $n \geq k$ unde

$$F_n = -(K_n + D_n^* R_{n+1} D_n)^{-1} D_n^* R_{n+1} A_n. \tag{2.6.13}$$

Fie n_0 şi ρ numerele din Definiţia 2.5.1. Considerăm operatorul liniar autoadjuct şi nenegativ definit de formula

$$\langle T_n x, x\rangle = \sum_{j=n}^{n+n_0} (E \left\| C_j \widetilde{X}(j,n)x \right\|^2 + E \left\langle K_j F_j \widetilde{X}(j,n)x, F_j \widetilde{X}(j,n)x \right\rangle).$$

Vom demonstra că $inf\{\langle T_n x, x\rangle, n \in$ $\mathbf{N}, \|x\| = 1\} > 0$. Presupunem prin absurd că $inf\{\langle T_n x, x\rangle, n \in$ $\mathbf{N}, \|x\| = 1\} = 0$. Atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon, x_\varepsilon, \|x_\varepsilon\| = 1$ astfel incât $< T_{n_\varepsilon} x_\varepsilon, x_\varepsilon >< \varepsilon$. Dacă notăm $\widehat{x}_j^\varepsilon = \widetilde{X}(j, n_\varepsilon)x_\varepsilon$ şi $u_j^\varepsilon = F_j \widehat{x}_j^\varepsilon$, avem

$$\varepsilon > \langle T_{n_\varepsilon} x_\varepsilon, x_\varepsilon \rangle \geq \delta E \sum_{j=n_\varepsilon}^{n_\varepsilon+n_0} \left\| u_j^\varepsilon \right\|^2, \tag{2.6.14}$$

deoarece $K_n \geq \delta I$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$. Pe de altă parte , $\varepsilon > \langle T_{n_\varepsilon} x_\varepsilon, x_\varepsilon \rangle \geq \sum\limits_{j=n_\varepsilon}^{n_\varepsilon+n_0} E \left\| C_j \widetilde{X}(j, n_\varepsilon) x_\varepsilon \right\|^2$. Din Lema 2.6.1 ,deducem că

$\widetilde{X}(j, n_\varepsilon) x_\varepsilon = X(j, n_\varepsilon) x_\varepsilon + \sum\limits_{i=n_\varepsilon}^{j-1} X(j, i+1) D_i u_i^\varepsilon$, pentru toţi $j \geq n_\varepsilon + 1$
.

Astfel, obţinem $\varepsilon > \sum\limits_{j=n_\varepsilon+1}^{n_\varepsilon+n_0} E \left\| C_j \widetilde{X}(j, n_\varepsilon) x_\varepsilon \right\|^2 + \left\| C_{n_\varepsilon} x_\varepsilon \right\|^2 =$

$= \sum\limits_{j=n_\varepsilon+1}^{n_\varepsilon+n_0} E \left\| C_j X(j, n_\varepsilon) x_\varepsilon + C_j \sum\limits_{i=n_\varepsilon}^{j-1} X(j, i+1) D_i u_i^\varepsilon \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| C_{n_\varepsilon} x_\varepsilon \right\|^2 \geq$

$$\geq \frac{1}{2} [(\sum_{j=n_\varepsilon+1}^{n_\varepsilon+n_0} E \left\| C_j X(j, n_\varepsilon) x_\varepsilon \right\|^2 + \left\| C_{n_\varepsilon} x_\varepsilon \right\|^2) -$$

$$\widetilde{C}^2 \sum_{j=n_\varepsilon+1}^{n_\varepsilon+n_0} E \left\| \sum_{i=n_\varepsilon}^{j-1} X(j, i+1) D_i u_i^\varepsilon \right\|^2],$$

unde $\widetilde{C} = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \| C_n \|$. Din H_1 şi Corolarul 1.3.2 rezultă că

$$E \| X(n, k) \eta \|^2 \leq \max\{1, (\widetilde{A}^2 + \widetilde{b} \widetilde{B}^2)^{n-k}\} E \| \eta \|^2$$

pentru toţi $n \geq k$ şi $\eta \in L_k^2(H)$. Deoarece D_i este mărginit pe $\mathbf{N}$, folosim rezultatul de mai sus şi (2.6.14) şi avem

$$E \left\| \sum_{i=n_\varepsilon}^{j-1} X(j, i+1) D_i u_i^\varepsilon \right\|^2 \leq \widetilde{D}^2 \mu_{n_0} E \sum_{i=n_\varepsilon}^{n_\varepsilon+n_0} \| u_i^\varepsilon \|^2 \leq c\varepsilon,$$

unde $\mu_{n_0} = \max\{1, (\widetilde{A}^2 + \widetilde{b}\, \widetilde{B}^2)^{n_0}\}$, $\widetilde{D} = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \| D_n \|$ şi $c = \frac{\widetilde{D}^2 \mu_{n_0}}{\delta}$. Acum avem $\varepsilon > \frac{1}{2} (\sum\limits_{j=n_\varepsilon}^{n_\varepsilon+n_0} E \| C_{n_\varepsilon} X(j, n_\varepsilon) x_\varepsilon \|^2 - \widetilde{C}^2 n_0 c \varepsilon)$ şi din Definiţia 2.5.1 obţinem

$\varepsilon > \frac{1}{2}(\rho - C^2 n_0 c\varepsilon)$. Este clar că am obţinut o contradicţie deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar. De aici deducem că există $m > 0$ astfel incât

$$\langle T_n x, x\rangle \geq m\,\|x\|^2 \tag{2.6.15}$$

pentru toţi $n \in \mathbf{N}$ şi $x \in H$. Calculând obţinem

$$E\left\langle R_{n_0+n+1}\widetilde{X}(n_0+n+1,n)x, \widetilde{X}(n_0+n+1,n)x\right\rangle - \langle R_n x, x\rangle = -\langle T_n x, x\rangle .$$

Din ultima egalitate şi ipoteză (şirul R_n este mărginit pe $\mathbf{N}$, i.e există $M > 0$ astfel incât $R_n \leq MI$), avem

$$m\,\|x\|^2 \leq \langle T_n x, x\rangle \leq \langle R_n x, x\rangle \leq M\,\|x\|^2 . \tag{2.6.16}$$

Este clar că $m \leq M$. Dacă $m = M$ demonstraţia este trivială. Presupunem $M > m$. Din (2.6.15), rezultă

$$E\left\langle R_{n_0+n+1}\widetilde{X}(n_0+n+1,n)x, \widetilde{X}(n_0+n+1,n)x\right\rangle - \langle R_n x, x\rangle \leq -m\,\|x\|^2$$

$$\leq -m/M\,\langle R_n x, x\rangle .$$

Astfel, $E\left\langle R_{n_0+n+1}\widetilde{X}(n_0+n+1,n)x, \widetilde{X}(n_0+n+1,n)x\right\rangle \leq q\,\langle R_n x, x\rangle$ pentru toţi $n \in \mathbf{N}$ şi $x \in H$, unde $q = 1 - m/M$, $q \in (0,1)$(Se pot alege constantele m, M astfel incât $m/M < 1$). Fie $\widetilde{T}(n,k)$ operatorul introdus de Teorema 2.2.4 pentru sistemul (2.6.12), (2.6.13). Inegalitatea precedentă este echivalentă cu $\left\langle \widetilde{T}(n_0+n+1,n)R_{n_0+n+1}x, x\right\rangle \leq q\,\langle R_n x, x\rangle$ sau $\widetilde{T}(n_0+n+1,n)\left(R_{n_0+n+1}\right) \leq qR_n$.

Deoarece $\widetilde{T}(n,k)$ este monoton (adică $\widetilde{T}(n,k)(P) \leq \widetilde{T}(n,k)(R)$ dacă $P \leq R, n \geq k$) deducem că $\widetilde{T}(n,k)\left(\widetilde{T}(n_0+n+1,n)\left(R_{n_0+n+1}\right)\right) \leq q\widetilde{T}(n,k)(R_n)$ sau $\widetilde{T}(n_0+n+1,k)R_{n_0+n+1} \leq q\widetilde{T}(n,k)(R_n)$ oricare ar fi $n \geq k$.

Fie $n \geq k$ oarecare. Atunci există $c, r \in \mathbf{N}$ astfel incât $n - k = (n_0+1)c + r$ şi $0 \leq r \leq n_0$. Prin inducţie după c (pentru r fixat) rezultă:

$$\widetilde{T}(n,k)(R_n) \leq q^c \widetilde{T}(r+k,k)(R_r).$$

Din (2.6.16) şi monotonia operatorului $\widetilde{T}(n,k)$ obţinem $m\widetilde{T}(n,k)(I) \leq q^c GI$ unde $G = M \max_{0 \leq r \leq n_0} \{ \left\| \widetilde{X}(r+k,k) \right\|^2 \}$. Facem observaţia că $\left\| \widetilde{X}(r+k,k) \right\|^2$ este finită dacă şirurile A_n, B_n, b_n sunt mărginite conform Corolarului 1.3.2.

Dacă luăm $a = q^{1/(n_0+1)}$ şi $b = q^{-n_0/(n_0+1)}(G/m) \geq 1$ obţinem $\widetilde{T}(n,k)(I) \leq ba^{n-k}I$.

Conform Teoremei 2.2.4 obţinem $E \left\| \widetilde{X}(n,k)y \right\|^2 \leq ba^{n-k} \|y\|^2$ pentru toţi $y \in H$ şi $0 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbf{N}$. De aici rezultă că R_n este stabilizantă pentru (2.6.1). Demonstraţia este completă . □

Acum putem enunţa rezultatul principal al acestui paragraf..

Teorema 2.6.9. *Presupunem că:*

1) Sistemul (2.6.1) este stabilizabil;

2) Sistemul (2.5.1) este uniform observabil;

Atunci ecuaţia Riccati (2.6.4) admite o unică soluţie uniform pozitivă şi mărginită pe $\mathbf{N}$, *care este stabilizantă.*

Demonstraţie. Din Propoziţia 2.6.7 şi 1) deducem că (2.6.4) admite o soluţie nenegativă şi mărginită pe $\mathbf{N}$ care, conform Propoziţiei 2.6.5, este unică. Aplicăm teorema de mai sus şi obţinem concluzia. □

Teorema de mai sus este demonstrată in [**50**] pentru sisteme stocastice discrete in cazul spaţiilor finit dimensionale iar afirmaţia similară pentru cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale stocastice considerate tot pe spaţii finit dimensionale este demonstrată in [**48**].

Corolarul 2.6.10. *Dacă sunt satisfăcute ipotezele teoremei precedente atunci*

$$\min_{u\in U_{i,x}} I_k(x,u) = I_k(x,\widetilde{u}) = \langle R_k x, x\rangle ,$$

unde $\widetilde{u}_n = -(K_n + D_n^* R_{n+1} D_n)^{-1} D_n^* R_{n+1} A_n \widetilde{x}_n$, $n \geq k \geq 0$, R_n *este soluţia a lui (2.6.4) dată de Teorema 2.6.9 şi* $\widetilde{x}_n$ *este soluţia sistemului (2.6.12),(2.6.13).*

Demonstraţie. Fie x_n soluţia sistemului (2.6.1) şi R_n soluţia lui (2.6.4). Argumentând ca in demonstraţia Lemei 2.6.6 avem

$$E\langle R_n x_n, x_n\rangle = \langle R_k x, x\rangle - E\sum_{i=k}^{n-1}[\|C_i x_i\|^2 + \langle K_i u_i, u_i\rangle] +$$

$$+ E\sum_{i=k}^{n-1} < (K_i + D_i^* R_{i+1} D_i)\{u_i + [K_i + D_i^* R_{i+1} D_i]^{-1} D_i^* R_{i+1} A_i x_i\},$$

$$\{u_i + [K_i + D_i^* R_{i+1} D_i]^{-1} D_i^* R_{i+1} A_i x_i\} >$$

Fie $F_n = -[K_n + D_n^* R_{n+1} D_n]^{-1} D_n^* R_{n+1} A_n$, $\widetilde{x}_n$ soluţia sistemului $\{A_n + D_n F_n; B_n\}$ şi $\widetilde{u}_n = F_n \widetilde{x}_n$. Deoarece R_n este stabilizantă obţinem $E\langle R_n \widetilde{x}_n, \widetilde{x}_n\rangle \leq PE\|\widetilde{x}_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (unde $\langle R_n x, x\rangle \leq P\|x\|^2$ pentru toţi $x \in H$, $n \in \mathbf{N}$) şi este uşor de verificat că $\widetilde{u} \in \widetilde{U}_{k,x}$.

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ in relaţia de mai sus şi folosind teorema convergenţei monotone, rezultă că $\langle R_k x, x\rangle = I_k(x,\widetilde{u})$ şi in consecinţă $\widetilde{u} \in U_{k,x}$. Astfel $\min_{u\in U_{i,x}} I_k(x,u) \leq I_k(x,\widetilde{u}) = \langle R_k x, x\rangle$. Fie $R(M,k)$ soluţia ecuaţiei (2.6.4) cu condiţia finală $R(M,M) = 0$.

Dacă $u \in U_{k,x}$este clar că şirul $\overline{u}_n = \{u_k, u_{k+1}, ..., u_{M-1}\}$ aparţine lui $U_{k,M}$. Din Lema 2.6.6 avem : $\langle R(M,k)x, x\rangle \leq V(M,k,x,\overline{u}) \leq I_k(x,u)$, pentru toţi $M > k$. Trecând la limită pentru $M \to \infty$, rezultă

$\langle R_k x, x\rangle \leq I_k(x,u)$ pentru toţi $u \in U_{k,x}$. Am obţinut concluzia. □

7. Dihotomia exponenţială

În acest paragraf sunt obţinute caracterizări ale dihotomiei exponenţiale in cazul sistemelor stocastice discrete (Teorema 2.7.3., Propoziţia 2.7.2, Teorema 2.7.7). Astfel, Teorema 2.7.7 ne asigură că dihotomia exponenţială a sistemului determinist (2.2.2) in raport cu spaţiul $Im\mathcal{P}_1$ şi complementul său ortogonal reprezintă o condiţie suficientă pentru dihotomia exponenţială a sistemului discret stocastic (2.2.1). În ceea ce priveşte sistemele discrete deterministe, se cunosc mai multe rezultate ([**44**], [**45**], [**46**]) care dau condiţii necesare şi suficiente pentru realizarea dihotomiei exponenţiale.

7.1. Dihotomia exponenţială a sistemelor liniare discrete perturbate cu variabile aleatoare independente. Considerăm sistemul (2.2.1). Dacă $X(n,k)$ este operatorul de evoluţie stocastic asociat acestui sistem atunci considerăm H_1 un subspaţiu inchis al lui H şi H_2 complementul său ortogonal. (Putem considera H_1 ca fiind inchiderea subspaţiului vectorial definit astfel

$$V_1 = \{x_0 \in H / X(n,0)x_0 \in l^\infty(L^2(H,\Omega))\})$$

Dacă P_1 este proiecţia lui H pe H_1 atunci $P_2 = I - P_1$ este proiecţia lui H pe H_2. Definim $X_1(n,k) = X(n,k)P_1$ şi $X_2(n,k) = X(n,k)P_2$. Definiţia de mai jos este versiunea stocastică a definiţiei D.1.1 din [**44**].

Definiţia 2.7.1. Spunem că sistemul (2.2.1) este (*uniform*) *exponenţial dihotomic in raport cu perechea de spaţii* (H_1, H_2) dacă şi numai dacă există constantele $\beta \geq 1$ şi $a \in (0,1)$ astfel incât oricare ar fi $n \geq k \geq 0$ şi $x \in H$ să avem

i) $E\left\|X_1(n,0)x\right\|^2 \leq \beta a^{n-k} E\left\|X_1(k,0)x\right\|^2$ şi

ii) $\beta a^{n-k} E\left\|X_2(n,0)x\right\|^2 \geq E\left\|X_2(k,0)x\right\|^2$ oricare ar fi $x \in H$.

Dacă perturbaţia stocastică lipseşte $(B_n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N})$ atunci obţinem definiţia *dihotomiei exponenţiale* (*uniforme*) a sistemului determinist corespunzător, dată in [**44**].

Avem nevoie de câteva notaţii noi. Dacă $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ sunt operatorii din $L(\mathcal{N})$ definiţi de formulele $\mathcal{P}_1(S) = P_1SP_1$ şi $\mathcal{P}_2(S) = P_2SP_2$, unde P_1 şi P_2 sunt proiecţiile definite la inceputul acestei secţiuni atunci vom nota cu $Y_1(n,k)$ şi respectiv $Y_2(n,k)$ operatorii din $L(\mathcal{N})$ daţi de $Y_1(n,k) = Y(n,k)\mathcal{P}_1$ şi respectiv $Y_2(n,k) = Y(n,k)\mathcal{P}_2$ oricare ar fi $n \geq k \geq 0$. În acest moment putem demonstra două din rezultatele principale ale acestui paragraf care stabilesc condiţii necesare şi suficiente (deterministe) pentru ca sistemul (2.2.1) să fie exponenţial dihotomic.

Propoziţia de mai jos este o consecinţă directă a relaţiei (2.2.4) şi a Definiţiei 2.7.1.

Propoziţia 2.7.2. *Sistemul (2.2.1) este exponenţial dihotomic in raport cu perechea de spaţii* (H_1, H_2) *dacă şi numai dacă şi numai dacă există constantele* $\beta \geq 1$ *şi* $a \in (0,1)$ *astfel incât oricare ar fi* $n \geq k \geq 0$ *şi* $x \in H$ *să avem*

i) $\left\|Y(n,0)\,\mathcal{P}_1(x \otimes x)\right\|_1 \leq \beta a^{n-k} \left\|Y(k,0)\,\mathcal{P}_1(x \otimes x)\right\|_1$ *şi*

ii)$\beta a^{n-k} \left\|Y(n,0)\,\mathcal{P}_2(x \otimes x)\right\|_1 \geq \left\|Y(k,0)\,\mathcal{P}_2(x \otimes x)\right\|_1$ *oricare ar fi* $x \in H$.

Teorema 2.7.3. *Sistemul (2.2.1) este exponenţial dihotomic in raport cu perechea de spaţii* (H_1, H_2) *dacă şi numai dacă există constantele reale şi pozitive* M_1, M_2 *şi* $q \in [1,\infty)$ *astfel incât să avem*

1) $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left\|Y_1(k,0)(x \otimes x)\right\|_1^q \leq M_1 \left\|Y_1(n,0)(x \otimes x)\right\|_1^q$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$ *şi* $x \in H$.

2) $\sum_{k=0}^{n} \|Y_2(k,0)(x \otimes x)\|_1^q \leq M_2 \|Y_2(n,0)(x \otimes x)\|_1^q$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$ *şi* $x \in H$.

Demonstraţie. Având in vedere definiţiile operatorilor $Y_1(n,k)$ şi $Y_2(n,k)$ se poate stabili ,urmând exact acelaşi tip de demonstraţie ca cel folosit pentru stabilirea teoremelor T.2.3.12 şi respectiv T 2.3.18, că inegalitatea 1) (respectiv 2)) din teorema de faţă este echivalentă cu condiţia 1) (respectiv 2)) din Definiţia 2.7.1. □

În acelaţi context se pot stabili şi condiţii suficiente pentru a avea dihotomie exponenţială. Propoziţia de mai jos demonstrează faptul că subspaţiul $Im\mathcal{P}_1$ este inchis şi deci $\mathcal{I}-.\mathcal{P}_1$ este un proiector continuu pe $\mathcal{N}$.

Propoziţia 2.7.4. *Fie* $\mathcal{P}_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $\mathcal{P}_1(S) = P_1 S P_1$ *unde* P_1 *este proiecţia lui* H *pe* H_1. *Atunci* $\mathcal{P}_1$ *este un proiector continuu pe* $\mathcal{N}$. *şi* $Im\mathcal{P}_1$ *este un subspaţiu inchis al lui* $\mathcal{N}$.

Demonstraţie. Este clar că $\mathcal{P}_1$ este o aplicaţie liniară pe $\mathcal{N}$ şi ţinând cont de idempotenţa lui P_1 deducem uşor că are loc relaţia $\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$. Deoarece $\|\mathcal{P}_1(S)\|_1 = \|P_1 S P_1\|_1 \leq \|P_1\|^2 \|S\|_1$ putem spune că $\mathcal{P}_1$ este un operator mărginit. Se cunoaşte faptul că o aplicaţie continuă şi idempotentă are imaginea inchisă ceea ce demonstrează faptul că $Im\mathcal{P}_1$ este un subspaţiu inchis al lui $\mathcal{N}$. □

O caracterizare a lui $Im\mathcal{P}_1$ este dată de propoziţia de mai jos.

Propoziţia 2.7.5. *Există un izomorfism izometric de la* $Im\mathcal{P}_1$ *la* $\mathcal{N}_1$ *unde* $\mathcal{N}_1$ *este spaţiul tuturor operatorilor autoadjuncţi ce aparţin lui* $C_1(H_1)$.

Demonstraţie. Vom considera aplicaţia liniară $f : Im\mathcal{P}_1 \to \mathcal{N}_1$ dată de formula $f(Q) = Q|_{H_1}$ pentru orice $Q \in Im\mathcal{P}_1$, unde am notat cu $Q|_{H_1}$ restricţia operatorului Q la H_1. Dacă $Q \in Im\mathcal{P}_1$ atunci există $\widetilde{Q} \in \mathcal{N}$ astfel incât $\mathcal{P}_1(\widetilde{Q}) = Q$ i.e $Q = P_1\widetilde{Q}P_1$.Astfel $P_1Q = Q$ şi $Q(H) \subset H_1$. Cum Q este un operator compact, autoadjunct aplicăm Teorema 1.1.7 şi deducem că există o bază ortonormată $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}^+} \subset H$ şi un şir $\{\lambda_i\} \subset \mathbf{R}$, $\lambda_i \to 0$ astfel incât $Qe_i = \lambda_i e_i$ pentru toţi $i \in \mathbf{N}^*$, ceea ce inseamnă că

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i.$$

Deoarece pentru orice vector propriu e_i al lui Q pentru care $\lambda_i \neq 0$, avem $e_i \in H_1$, $i \in \mathbf{N}^*$, rezultă că

$$Q|_{H_1} = \sum_{i=1,\lambda_i\neq 0}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i \tag{2.7.1}$$

$Q|_{H_1} \in L(H_1)$ şi aplicând acelaşi raţionament ca in cazul demonstraţiei Propoziţiei 1.1.8 vedem că $|Q|_{H_1}| = \sum\limits_{i=1,\lambda_i\neq 0}^{\infty} |\lambda_i|\, e_i \otimes e_i$. Calculăm $\|.\|_1$ a operatorului $|Q|$ relativ la spaţiul $\mathcal{N}_1$ şi constatăm că $\|\,|Q|\,\|_1 = \sum\limits_{i=1,\lambda_i\neq 0}^{\infty} |\lambda_i|$. Pe de altă parte, aplicăm Propoziţia 1.1.8 şi avem $\|Q\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$. Deci, f este o izometrie.

În final, observăm că dacă $Q \in \mathcal{N}_1$atunci putem considera extensia naturală a lui Q la H ca fiind operatorul liniar $\widehat{Q}(x) = Q(x)$ dacă $x \in H_1$ şi $\widehat{Q}(x) = 0$ dacă $x \in H_1^{\perp}$. Deoarece $\left\langle \widehat{Q}x, y \right\rangle = \left\langle \widehat{Q}(x_1 + x_2), (y_1 + y_2) \right\rangle$, unde $x_1 + x_2$ este descompunerea unică a lui $x \in H$ in sumă de doi vectori $x_1 \in H_1$ şi x$_2 \in H_1^{\perp}$ atunci $\left\langle \widehat{Q}x, y \right\rangle = \langle Q(x_1), y_1\rangle = \langle x_1, Q(y_1)\rangle = \left\langle x, \widehat{Q}y \right\rangle$ şi deci $\widehat{Q}$ este autoadjunct. Mai mult, $\sup\limits_{\|x\|=1} \left|\left\langle \widehat{Q}x, x \right\rangle\right| = \sup\limits_{\|x_1\|+\|x_2\|=1} \langle Q(x_1), x_1\rangle \leq \|Q\|$ şi deci $\widehat{Q} \in \mathcal{E}$.

Se observă că cu uşurinţă că$\left|\widehat{Q}\right| = \widehat{|Q|}$, unde am notat cu $\widehat{|Q|}$ extensia naturală a lui $|Q|$. Deci, $\left\|\widehat{Q}\right\|_1 = tr\left|\widehat{Q}\right| = tr\widehat{|Q|} = tr\,|Q| < \infty$. Ultima egalitate rezultă considerând o bază ortonormată a lui H obţinută prin completarea unei baze ortonormate din H_1 cu vectori din $H_1^{\perp}$. Acum este clar că operatorul extins aparţine lui $\mathcal{N}$ şi am arătat surjectivitatea lui f. În ceea ce priveşte injectivitatea aceasta rezultă din izometrie. Demonstraţia a fost terminată. $\square$

Observaţia 2.7.6. *Este o simplă verificare faptul că pentru orice* $Q \in \mathcal{N}$, P_2QP_2 *aparţine complementului ortogonal al lui* $Im\mathcal{P}_1$ *care coincide cu* $Ker\mathcal{P}_1$. *Într-adevăr* $\mathcal{P}_1(P_2QP_2) = P_1P_2QP_2P_1 = 0$ *şi rezultă concluzia.*

Teorema următoare stabileşte faptul că o condiţie suficientă pentru a avea dihotomie exponenţială pentru sistemul (2.2.1) este aceea ca sistemul determinist (2.2.2) să fie exponenţial dihotomic. Caracterizări ale dihotomiei exponenţiale pentru sistemele liniare discrete, deterministe sunt date in lucrările ([**44**], [**45**], [**46**]).

Teorema 2.7.7. *Dacă sistemul (2.2.2) este exponenţial dihotomic in raport cu* $(Im\mathcal{P}_1, Ker\mathcal{P}_1)$ *atunci sistemul (2.2.1) este exponenţial dihotomic in raport cu* $(H_1,\ H_2)$.

Demonstraţie. Dacă sistemul (2.2.2) este exponenţial dihotomic (Definiţia 2.7.1) in raport cu $(Im\mathcal{P}_1, Ker\mathcal{P}_1)$ atunci , conform rezultatelor din [**45**], există constantele reale şi pozitive $M_1, M_2, M_2 > 1$ şi $q \in [1, \infty)$ astfel incât să avem

1) $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|Y(k,0)(T_1)\|_1^q \leq M_1 \|Y(n,0)(T_1)\|_1^q$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ şi $T_1 \in \operatorname{Im}\mathcal{P}_1$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \|Y(k,0)(T_2)\|_1^q \leq M_2 \|Y(n,0)(T_2)\|_1^q$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ şi $T_2 \in Ker\mathcal{P}_1$. Din 2) şi Observaţia 2.7.6 rezultă că avem

2') $\sum\limits_{k=0}^{n} \|Y(k,0)(T_2)\|_1^q \leq M_2 \|Y(n,0)(T_2)\|_1^q$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ şi $T_2 \in Im\mathcal{P}_2$. Acum este clar că avem

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|Y(k,0)(\mathcal{P}_1(T))\|_1^q \le M_1 \|Y(n,0)(\mathcal{P}_1(T))\|_1^q$ şi
$\sum\limits_{k=0}^{n} \|Y(k,0)(\mathcal{P}_2(T))\|_1^q \le M_2 \|Y(n+1,0)(\mathcal{P}_2(T))\|_1^q$ oricare ar fi şi $T \in \mathcal{N}$ şi luând $T = x \otimes x \in \mathcal{N}$ avem indeplinite condiţiile 1) şi 2) din Teorema 2.7.3 şi rezultă concluzia. □

Observaţia 2.7.8. *Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată deoarece dacă* $H_2 = H$ *atunci* $H_1 = (0)$, $Im\mathcal{P}_2 = \mathcal{N}$, *dihotomia exponenţială a lui (2.2.1)(respectiv (2.2.2)) in raport cu* (H_1, H_2) *(respectiv* $(0, \mathcal{N})$*) este echivalentă cu instabilitatea exponenţială a sistemului (2.2.1)(respectiv (2.2.2)) iar instabilitatea exponenţială a sistemului (2.2.1) nu implică instabilitatea exponenţială a sistemului (2.2.2), după cum am arătat in subparagraful 3.2 al acestui capitol.*

8. Comentarii bibliografice

Punctul de plecare in realizarea acestui capitol il constituie lucrările [**49**], [**50**], [**51**], [**52**], [**76**], [**77**]. Rezultatele din acest capitol referitore la teoremele de reprezentare a mediilor pătratice ale soluţiilor şi la stabilitatea exponenţială uniformă (respectiv neuniformă) (cazul sistemelor cu coeficienţi variabili) au fost publicate in [**66**]. Teorema de reprezentare, ce foloseşte operatori de evoluţie care acţionează pe spaţii nucleare, este originală iar cea de a doua reprezentare este extinderea la cazul infinit dimensional a reprezentării similare din [**49**]. Caracterizarea stabilităţii exponenţiale uniforme cu ajutorul ecuaţiilor Lyapunov ([**66**]) este varianta stocastică a rezultatelor din [**43**]. Caracterizarea deterministă a conceptului de observabilitate uniformă şi condiţiile necesare şi suficiente, pentru stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor liniare stocastice discrete uniform observabile, sunt extinderi la cazul infinit dimensional al rezultatelor din [**49**]. Tot in acest capitol s-a demonstrat, prin analogie cu cazul finit dimensional ([**50**]), că, in condiţii de stabilizabilitate a sistemului cu control şi uniform observabilitate a sistemului liniar discret stocastic supus controlului, ecuaţia Riccati asociată problemei controlului liniar pătratic are o soluţie uniform pozitivă şi mărginită pe $\mathbf{N}$, care este stabilizantă pentru sistemul cu control. Ca o consecinţă a acestui rezultat, este obţinut controlul feedback care minimizează costul asociat sistemului cu control.

Rezultatele şi conceptele ce privesc dihotomia exponenţială sunt generalizări la cazul stocastic ale rezultatelor şi conceptelor similare din cazul determinist care apar in lucrările [**43**], [**44**], [**45**].

Pentru a rezolva problemele legate de dihotomia exponenţială, am definit noţiunea de instabilitate exponenţială pentru sistemele stocastice discrete şi am dat caracterizări deterministe ale acesteia. În cazul determinist, finit dimensional, instabilitatea exponenţială a sistemului determinist (2.2.1), in care luăm $B_n = 0$, este echivalentă cu instabilitatea exponenţială a sistemului determinist asociat (2.2.2) (Propoziţia 2.3.17). În cazul stocastic, acest lucru nu se intâmplă, conform contraexemplului din subparagraful 3.2.

Propoziţia 2.7.2 şi Teorema 2.7.3 stabilesc condiţii necesare şi suficiente, deterministe pentru ca sistemul (2.2.1) să fie exponenţial dihotomic. Propoziţia 2.7.2 foloseşte prima reprezentare a mediei pătratice a sistemului (2.2.1), in timp ce Teorema 2.7.3 extinde la cazul stocastic Teorema 2.1 din [**45**]. Teorema 2.7.7 oferă o condiţie suficientă pentru dihotomia exponenţială a sistemului discret stocastic (2.2.1), condiţie care nu este şi necesară, conform Observaţiei 2.7.8.

CAPITOLUL 3

COMPORTĂRI ASIMPTOTICE ALE ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE STOCASTICE

1. Introducere

În acest capitol sunt studiate ecuaţii diferenţiale stocastice definite pe spaţii Hilbert separabile,reale .

Al **doilea paragraf** al acestui capitol este dedicat obţinerii unei teoreme de reprezentare a mediei pătratice a soluţiei de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) in ipoteza că familia de operatori $A(t)$ are proprietatea P_1 iar coeficienţii $G_i, i = 1, 2, .., m$ aparţin spaţiului $C_s(\mathbf{R}_+, L(H))$. Astfel, a fost demonstrată Teorema 3.2.8 care stabileşte că media pătratică a soluţiei de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) se poate reprezenta in funcţie de soluţia de evoluţie a ecuaţiei Lyapunov (3.2.10).

Această reprezentare permite atât obţinerea unor caracterizări deterministe ale stabilităţii exponenţiale (uniforme sau nu) (teoremele T.3.3.2 şi T 3.8.2) şi a observabilităţii uniforme (Teorema 3.4.2), cât şi a altor restricţii la care ar fi supuse soluţiile de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale discutate, dacă aceste condiţii se pot exprima in funcţie de media pătratică a soluţiilor.

În **paragraful al treilea** al acestui capitol a fost dată o caracterizare deterministă a stabilităţii exponenţiale uniforme a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale stocastice introduse in paragraful precedent. Această caracterizare a fost obţinută cu ajutorul teoremei de reprezentare demonstrate in paragraful al doilea. Facem observaţia că o altă caracterizare deterministă a stabilităţii exponenţiale uniforme (pentru ecuaţii stocastice ai căror coeficienţi A(t) sunt generatori ai unor operatori de evoluţie cu creştere exponenţială) a fost obţinută de G.Da Prato şi A. Ichikawa in [**11**].

Paragraful al patrulea al acestui capitol introduce noţiunea de observabilitate uniformă (a se vedea Definiţia 4 din [**47**] sau [**48**] pentru cazul finit dimensional). Teorema 3.4.2 dă o caracterizare deterministă a conceptului de observabilitate uniformă, caracterizare ce foloseşte teorema de reprezentare T 3.2.8. Teorema 3.4.5 stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor diferenţiale stocastice uniform observabile, cu ajutorul ecuaţiilor (diferenţiale) Lyapunov, in cazul general in care coeficienţii părţii stocastice satisfac condiţia $G_i \in C_s(\mathbf{R}_+, L(H)), i = 1, 2..m$.

În **paragraful 5** este considerată ecuaţia (1.4.1) in ipoteza $A, G_i \in C(\mathbf{R}_+, L(H)), i = 1, 2..m$. Au fost obţinute din nou, prin demonstraţii independente de cele folosite până acum, toate rezultatele demonstrate in primele două paragrafe ale acestui capitol.

Paragraful 6 este dedicat studiului ecuaţiilor diferenţiale stocastice cu coeficienţi invarianţi in timp. În acest caz este stabilită o proprietate suplimentară a reprezentării introduse in cel de al doilea paragraf (dată de relaţia (3.6.6)) şi este dată o teoremă de caracterizare a stabilităţii exponenţiale uniforme a sistemelor uniform observabile, cu ajutorul ecuaţiilor Lyapunov algebrice (Teorema 3.6.1).

În **penultimul paragraf** al acestui capitol este considerată problema existenţei unei soluţii de evoluţie mărginită a ecuaţiei Riccati (3.7.4), asociată problemei controlului liniar pătratic al ecuaţiei (1.4.1), care să fie stabilizantă pentru acesta. G.Da Prato şi I. Ichikawa au demonstrat in [**10**] că dacă ecuaţia $\{A, B; G_i\}$ *este stabilizabilă* (Definiţia 3.7.2) şi sistemul $\{A, C; G_i\}$ este detectabil (Definiţia 3.7.1) atunci ecuaţia Riccati (3.7.4) asociată problemei controlului liniar pătratic are o soluţie unică şi mărginită pe $\mathbf{R}_+$ care este stabilizantă pentru (1.4.1). În acest paragraf condiţia de detectabilitate a fost inlocuită cu cea de observabilitate uniformă şi am obţinut aceeaşi concluzie (pentru cazul finit dimensional se poate vedea lucrarea [**48**]) şi, in plus, faptul că soluţia ecuaţiei Riccati este uniform pozitivă.

T.Morozan a demonstrat in [**47**] că, cel puţin in cazul finit dimensional, conceptele de stabilizabilitate şi detectabilitate şi respectiv controlabilitate uniformă şi observabilitate uniformă sunt duale.

Pentru a arăta că rezultatul din această lucrare este diferit de cel obţinut de G.Da Prato şi I. Ichikawa, am construit un contra-exemplu care demonstrează că implicaţia controlabilitatea uniformă implică stabilizabilitate este falsă in cazul stocastic, spre deosebire de cazul determinist, unde acest lucru are loc ([**39**], [**59**], [**9**])). În consecinţă, observabilitatea uniformă nu implică detectabilitatea şi rezultatul amintit mai sus este distinct de cel obţinut de G.Da Prato şi I. Ichikawa.

În sfârşit, in **ultimul paragraf** al acestui capitol, este tratată problema dihotomiei exponenţiale a ecuaţiilor diferenţiale stocastice. A fost definită noţiunea de dihotomie exponenţială şi au fost date condiţii necesare şi suficiente pentru obţinerea acestei. Rezultatele obţinute reprezintă variante stocastice ale teoremelor de caracterizare a dihotomiei exponenţiale uniforme a ecuaţiilor de evoluţie deterministe din [**41**] şi [**36**].

Folosind Teorema 3.2.8 de reprezentare a mediei pătrate a soluţiei de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1), am obţinut Teorema 3.8.2 care stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru dihotomia exponenţială folosind soluţia ecuaţiei diferenţiale Lyapunov (3.5.3).

Teorema 3.8.3 reprezintă varianta stocastică a unor rezultate similare stabilite de M.Megan şi C.Buşe in [**41**] şi M.Megan şi R.Laţcu in [**36**]. În final, sunt obţinute şi caracterizări ale dihotomiei exponenţiale cu ajutorul funcţiilor Lyapunov ([**42**], [**5**]).

2. Reprezentări ale mediilor pătratice ale soluţiilor de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale stocastice

În acest capitol sunt valabile toate notaţiile introduse in primul capitol şi in special cele introduse in paragraful al patrulea al primului capitol. Peste tot in acest paragraf vom presupune că famila de operatori A are proprietatea P_1 şi $G_i \in C_s([0,\infty), L(H)), i = 1, ..., m$, dacă nu se precizează altfel.

2.1. Ecuaţii Lyapunov. Introducem următoarea ecuaţie Lyapunov:

$$\frac{dQ(s)}{ds} + A^*(s)Q(s) + Q(s)A(s) + \tag{3.2.1}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} G_i^*(s)Q(s)G_i(s) + B(s) = 0, s \geq 0$$

unde $B \in C_b([0,\infty), L^+(H))$.

În concordanţă cu [**11**], vom spune că Q este o soluţie de evoluţie a ecuaţiei (3.2.1) pe un interval $J \subset \mathbf{R}_+$, dacă $Q \in C_s(J, L^+(H))$ şi satisface ecuaţia integrală

$$Q(s)x = U^*(t,s)Q(t)U(t,s)x + \tag{3.2.2}$$

$$+\int_s^t U^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)Q(r)G_i(r)+B(r)]U(r,s)xdr$$

oricare ar fi $s \leq t$, $s,t \in J$ şi $x \in\ H$.

Vom considera următoarea ecuaţie aproximantă:

$$\frac{dQ_n(s)}{ds}+A_n^*(s)Q_n(s)+Q_n(s)A_n(s)+ \tag{3.2.3}$$

$$+\sum_{i=1}^m G_i^*(s)Q_n(s)G_i(s)+B(s)=0, s\geq 0.$$

unde $A_n(t)$, $n \in \mathbf{N}$ sunt aproximările Yosida ale lui $A(t)$.

Atunci avem lema de mai jos ([**11**]).

Lema 3.2.1. *Fie* $0 < T < \infty$ *şi* $R \in L^+(H)$. *Atunci există o soluţie de evoluţie (resp. clasică) unică* Q*(resp.* Q_n*) a ecuaţiei (3.2.1) (resp. (3.2.3) pe* $[0,T]$ *astfel incât* $Q(T)=R$ *(resp.* $Q_n(T)=R$*). Aceste soluţii satisfac următoarele ecuaţii integrale:*

$$Q(s)x=U^*(T,s)RU(T,s)x+\int_s^T U^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)Q(r)G_i(r)+$$
$$B(r)]U(r,s)xdr$$

$$Q_n(s)x=U_n^*(T,s)RU_n(T,s)x+\int_s^T U_n^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)Q_n(r)G_i(r)+$$
$$B(r)]U_n(r,s)xdr,$$

iar pentru fiecare $x \in\ H$*,* $Q_n(s)x \to Q(s)x$ *uniform pe orice submulţime mărginită a lui* $[0,T]$. *Mai mult, dacă notăm aceste soluţii cu* $Q(T,s;R)$ *şi respectiv* $Q_n(T,s;R)$ *atunci ele sunt monotone, in sensul că* $Q(T,s;R_1) \leq Q(T,s;R_2)$*, dacă* $R_1 \leq R_2$.

2.2. Ecuaţii diferenţiale in $\mathcal{H}_2$. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ şi $t \geq 0$ considerăm funcţiile $L_n(t) : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$,

$$L_n(t)(P) = A_n(t)P + PA_n^*(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)PG_i^*(t), P \in \mathcal{H}_2.$$

Deoarece $C_2(H)$ este ideal bilateral in $L(H)$ (Teorema 1.1.1) şi $A_n(t)$, $G_i^*(t)$, $G_i(t) \in L(H)$, $i = 1, ..., m$, este clar că $L_n(t)(P) \in C_2(H)$ pentru orice $P \in C_2(H)$. Datorită faptului că avem

$$\langle L_n(t)(P)u, v\rangle = \langle A_n(t)Pu, v\rangle +$$

$$\langle PA_n^*(t)u, v\rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle G_i(t)PG_i^*(t)u, v\rangle = \langle u, PA_n^*(t)v\rangle +$$

$$\langle u, A_n(t)Pv\rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle u, G_i(t)PG_i^*(t)v\rangle = \langle u, L_n(t)(P)v\rangle$$

oricare ar fi $u, v \in H$ şi $P \in \mathcal{H}_2$ rezultă că $L_n(t)(P)$ este autoadjunct. Deci $L_n(t)$ este bine definit. Nu este dificil de văzut că $L_n(t)$ este liniar .

Calculând obţinem $\|L_n(t)(P)\|_2 \leq 2\|A_n(t)\| \|P\|_2 + \sum_{i=1}^{m} \|G_i(t)\|^2 \|P\|_2$ şi rezultă mărginirea lui $L_n(t)$. Astfel, $L_n(t) \in L(\mathcal{H}_2)$.

Acum vom determina adjunctul operatorului $L_n(t)$.

Dacă $R, P \in \mathcal{H}_2$ atunci

$\langle L_n(t)(P), R\rangle_2 = \left\langle A_n(t)P + PA_n^*(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)PG_i^*(t), R\right\rangle_2 =$

$= TrR\left[A_n(t)P + PA_n^*(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)PG_i^*(t)\right]$. Aplicăm (1.1.1) şi avem

$\langle L_n(t)(P), R\rangle_2 = TrPRA_n(t) + TrPA_n^*(t)R + \sum_{i=1}^{m} TrPG_i^*(t)RG_i(t) =$

$= \left\langle P, RA_n(t) + A_n^*(t)R + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(t)RG_i(t)\right\rangle_2$.

Pe de altă parte $\langle L_n(t)(P), R\rangle_2 = \langle P, L_n^*(t)R\rangle_2$ oricare ar fi $R, P \in \mathcal{H}_2$.

De aici deducem că $L_n^*(t)$ este operatorul liniar şi mărginit definit pe $\mathcal{H}_2$ cu valori in $\mathcal{H}_2$ dat de formula

$$L_n^*(t)(R) = RA_n(t) + A_n^*(t)R + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(t)RG_i(t) \tag{3.2.4}$$

oricare ar fi $t \geq 0$ şi $R \in \mathcal{H}_2$..

Lema 3.2.2. *([**22**])Dacă P_1 are loc şi $G_i \in C_s([0,\infty), L(H))$, $i = 1, ..., m$ atunci $L_n \in C_s([0,\infty), L(\mathcal{H}_2))$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.*

Demonstraţie. Deoarece familia de operatori $\mathcal{A}_n(t) : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$, $\mathcal{A}_n(t)(P) = A_n(t)P + PA_n^*(t), t \geq 0, n \in \mathbf{N}$ are proprietatea $\mathcal{A}_n \in C([0,\infty), L(\mathcal{H}_2))$, după cum rezultă din Lema 1.4.3, este suficient să arătăm că $\mathcal{G}_i \in C_s([0,\infty), L(\mathcal{H}_2))$, unde $\mathcal{G}_i(t) : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$, $\mathcal{G}_i(t)(P) = G_i(t)PG_i^*(t), i = 1, ..., m$.

Din Teorema 1.1.1 şi faptul că $G_i \in C_s([0,\infty), L(H))$, $i = 1, ..., m$, deducem că $G_iP \in C([0,\infty), \mathcal{H}_2)$ oricare ar fi $P \in \mathcal{H}_2, i = 1, ..., m$. Deoarece P este autoadjunct, este clar că avem şi $PG_i^* \in C([0,\infty), \mathcal{H}_2)$ oricare ar fi $P \in \mathcal{H}_2$.

Fie $s \geq 0, P \in \mathcal{H}_2$ fixaţi. Atunci pentru fiecare $i \in \{1, ..., m\}$ avem $\|\mathcal{G}_i(t)(P) - \mathcal{G}_i(s)(P)\|_2 = \|G_i(t)PG_i^*(t) - G_i(s)PG_i^*(s)\|_2 \leq$

$\leq \|G_i(t)PG_i^*(t) - G_i(t)PG_i^*(s)\|_2 + \|G_i(t)PG_i^*(s) - G_i(s)PG_i^*(s)\|_2$

Dacă $\widetilde{G}_{i,s} = \sup\limits_{t\in[0,s+1]} \|G_i(t)\|$ atunci $\|\mathcal{G}_i(t)(P) - \mathcal{G}_i(s)(P)\|_2 \leq$

$\widetilde{G}_{i,s} \|PG_i^*(t) - PG_i^*(s)\|_2 + \|G_i(t)PG_i^*(s) - G_i(s)PG_i^*(s)\|_2$ oricare ar fi $t \in [0, s+1]$. Acum este clar că, trecând la limită pentru $t \to s$ in inegalitatea de mai sus, avem

$$\lim_{t\to s} \|\mathcal{G}_i(t)(P) - \mathcal{G}_i(s)(P)\|_2 = 0.$$

(Dacă $s = 0$ atunci este vorba numai despre limita la dreapta.) □

Fie E un spaţiu Banach. În continuare vom considera ecuaţia

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} = \mathcal{L}(t)v(t), v(s) = x \in E, t \geq s \geq 0, \tag{3.2.5}$$

unde $\mathcal{L} \in C_s([0,\infty), L(E))$. Acestei ecuaţii ii ataşăm ecuaţia integrală

$$v(t) = x + \int_s^t \mathcal{L}(\tau)v(\tau)d\tau. \tag{3.2.6}$$

O funcţie $v : [s,T] \to E$ este soluţie clasică a ecuaţiei (3.2.5) dacă este derivabilă pe $[s,T]$, cu derivata continuă şi satisface ecuaţia (3.2.5). Avem nevoie de rezultatele următoare.

Lema 3.2.3. *a) Ecuaţia (3.2.6) are o singură soluţie in spaţiul* $C([s,T],E)$.

b) Ecuaţia (3.2.5) are o singură soluţie clasică.

Demonstraţia lemei de mai sus este standard şi de aceea nu o vom mai prezenta (se poate vedea T 5.5.1 din [**55**]). (Punctul a) rezultă folosind teorema de punct fix a lui Banach, iar punctul b) rezultă din a) prin derivarea relaţiei (3.2.6) in raport cu t). Propoziţia de mai jos este de asemenea demonstrată cu ajutorul unor metode des folosite in lucrări referitoare la operatori de evoluţie (de exemplu [**55**]), dar, deoarece demonstraţia nu este prea lungă, o vom prezenta cu demonstraţie.

Propoziţia 3.2.4. *Fie $T \geq 0$. Dacă definim familia de operatori $V(t,s)$ prin $V(t,s)x = v(t), x \in E$, unde v este soluţia ecuaţiei (3.2.5) atunci*

1) Pentru fiecare $0 \leq s \leq t \leq T, V(t,s)$ este un operator liniar şi mărginit şi dacă $\lambda = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\mathcal{L}(t)\|$ atunci $\|V(t,s)\| \leq e^{\lambda(t-s)}$.

2) $V(t,t) = I$ *oricare ar fi* $t \in [0,T], V(t,s) = V(t,r)V(r,s)$ *oricare ar fi* $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.

3) $V(t,s) \underset{t-s\to 0}{\longrightarrow} I$ *in topologia uniformă pentru orice* $0 \leq s \leq t \leq T$.

4) $(t,s) \to V(t,s)$ *este continuă pe* $\{(t,s)/0 \leq s \leq t \leq T\}$ *in topologia uniformă.*

5) $\frac{\partial^+ V(t,s)x}{\partial t}\Big|_{t=s} = \mathcal{L}(s)x$ *oricare ar fi* $x \in E$ *și* $0 \leq s \leq t \leq T$.

6) $\frac{\partial^- V(t,s)x}{\partial s}\Big|_{s=t} = -\mathcal{L}(t)x$ *oricare ar fi* $x \in E$ *și* $0 \leq s \leq t \leq T$.

7) $\frac{\partial V(t,s)x}{\partial s} = -V(t,s)\mathcal{L}(s)x$ *oricare ar fi* $x \in E$ *și* $0 \leq s \leq t \leq T$.

Am notat cu I operatorul identic pe E.

Operatorul $V(t,s)$ se numeşte operatorul de evoluţie generat de familia de operatori $\mathcal{L}$.

Demonstraţie. 1) Faptul că $V(t,s)$ este operator liniar este o consecinţă a dependenţei liniare de condiţile iniţiale a soluţiei ecuaţiei (3.2.5). Pentru a demonstra mărginirea lui $V(t,s)$ observăm că $\lambda = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\mathcal{L}(t)\|$ (există, conform principiului mărginirii uniforme) şi, din (3.2.6), rezultă că $\|v(t)\| \leq \|x\| + \int\limits_s^t \lambda \|v(\tau)\| d\tau$. Conform inegalităţii lui Gronwall, avem $\|v(t)\| \leq \|x\| e^{\lambda(t-s)}$ şi, folosind definiţia lui $V(t,s)$, rezultă atât mărginirea acestuia cât şi restul afirmaţiei punctului 1).

2) rezultă din unicitatea soluţiei ecuaţiei (3.2.5).

3) Deoarece $\|(V(t,s)-I)x\| \leq \int\limits_s^t \lambda \|V(\tau,s)x\| d\tau$, folosim 1) şi avem $\|(V(t,s)-I)x\| \leq \|x\| \lambda e^{\lambda T}(t-s)$. De aici rezultă concluzia. Punctul 4) este o consecinţă a lui 2) şi 3) iar 5) rezultă conform punctului b) al

lemei de mai sus. Vom demonstra 6). Fie $x \in E$. Calculăm

$$l = \lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{V(t,t)x - V(t,t-h)x}{h} + \mathcal{L}(t)x \right\|$$
$$= \lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} \mathcal{L}(\tau)V(\tau, t-h)x d\tau - \mathcal{L}(t)x \right\|$$

$$\leq \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} \| \mathcal{L}(\tau)V(\tau, t-h)x - \mathcal{L}(t)x \| \, d\tau.$$

Deoarece aplicaţia $\tau \to \| \mathcal{L}(\tau)V(\tau, t-h)x - \mathcal{L}(t)x \|$ este continuă, putem aplica teorema de medie şi deducem că există $\tau_h \in [t-h, t]$ astfel incât

$\frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} \| \mathcal{L}(\tau)V(\tau, t-h)x - \mathcal{L}(t)x \| \, d\tau = \| \mathcal{L}(\tau_h)V(\tau_h, t-h)x - \mathcal{L}(t)x \| .$

Deci,

$l \leq \lim_{h \searrow 0} \| \mathcal{L}(\tau_h)V(\tau_h, t-h)x - \mathcal{L}(t)x \| \leq$
$\leq \lim_{h \searrow 0} [\| \mathcal{L}(\tau_h)V(\tau_h, t-h)x - \mathcal{L}(\tau_h)x \| + \| \mathcal{L}(\tau_h)x - \mathcal{L}(t)x \|] \leq$
$\leq \lim_{h \searrow 0} [\lambda \| V(\tau_h, t-h)x - x \| + \| \mathcal{L}(\tau_h)x - \mathcal{L}(t)x \|] = 0$. Pentru a calcula ultima limită am aplicat 3) şi ipoteza. Deci $\frac{\partial^- V(t,s)x}{\partial s}|_{s=t} = -\mathcal{L}(t)x$ oricare ar fi $x \in E$ şi $0 \leq s \leq t \leq T$.

7) Fie $t \geq s > 0, t \leq T$. Arătăm că există $\frac{\partial^- V(t,s)x}{\partial s}$ oricare ar fi $x \in E$. Avem $\lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{V(t,s)x - V(t,s-h)x}{h} + V(t,s)\mathcal{L}(s)x \right\| =$
$\lim_{h \searrow 0} \left\| V(t,s) \left[\frac{x - V(s,s-h)x}{h} + \mathcal{L}(s)x \right] \right\| \leq$
$\leq \| V(t,s) \| \lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{V(s,s)x - V(s,s-h)x}{h} + \mathcal{L}(s)x \right\| = 0$. Ultima egalitate rezultă conform punctului 6). Deci $\frac{\partial^- V(t,s)x}{\partial s} = -V(t,s)\mathcal{L}(s)x$ oricare ar fi $x \in E$ şi $0 < s \leq t \leq T$.

Dacă $t > s \geq 0$ atunci calculăm $l = \lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{V(t,s+h)x - V(t,s)x}{h} + V(t,s)\mathcal{L}(s)x \right\|$.
Aplicăm 2) şi deducem că l este egal cu limita următoare:
$\lim_{h \searrow 0} \left\| V(t,s+h) \left[\frac{x - V(s+h,s)x}{h} + \mathcal{L}(s)x \right] + [V(t,s) - V(t,s+h)] \mathcal{L}(s)x \right\| \leq$

$\leq \lim_{h\searrow 0} e^{\lambda(t-h-s)} \left\| \frac{V(s+h,s)x-x}{h} - \mathcal{L}(s)x \right\| + \lim_{h\searrow 0} \|V(t,s) - V(t,s+h)\| \, \|\mathcal{L}(s)x\|$.
Ultimele două limite sunt egale cu zero conform 5) şi 4).

Am obţinut $\frac{\partial^+ V(t,s)x}{\partial s} = -V(t,s)\mathcal{L}(s)x$. Dacă $s = 0$ nu avem decât limită la dreapta. Demonstraţia a fost terminată. □

Considerăm ecuaţia

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = L_n(t)P_n(t) \tag{3.2.7}$$

in $\mathcal{H}_2$. Conform lemei de mai sus şi Lemei 3.2.2 rezultă că ecuaţia (3.2.7) cu condiţia iniţială $P_n(s) = S \in \mathcal{H}_2$ are o soluţie unică $P_n(t) = \mathcal{U}_n(t,s)(S)$ oricare ar fi $t \geq s \geq 0$, unde $\mathcal{U}_n(t,s) \in L(\mathcal{H}_2)$ este operatorul de evoluţie generat de $L_n(t)$.

Din Propoziţia 3.2.4 (4) şi 7)) deducem că aplicaţia

$$\mathcal{U}_n(t,s) \text{ este continuă in topologia normei pe } 0 \leq s \leq t \tag{3.2.8}$$

şi $\frac{\partial \mathcal{U}_n(t,s)S}{\partial s} = -\mathcal{U}_n(t,s)L_n(s)S$ oricare ar fi $t \geq s \geq 0$ şi $S \in \mathcal{H}_2$.

Atunci

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle \mathcal{U}_n^*(t,s)R, S\rangle_2 = \langle -L_n^*(s)\mathcal{U}_n^*(t,s)R, S\rangle_2 \,, S, R \in \mathcal{H}_2$$

pentru toţi $t \geq s \geq 0$. Dacă luăm $S = x \otimes x, x \in H$ atunci inlocuind s cu σ şi integrând de la s la t avem

(3.2.9)

$$\langle \mathcal{U}_n^*(t,s)Rx, x\rangle - \langle Rx, x\rangle = \int_s^t \langle L_n^*(\sigma)\mathcal{U}_n^*(t,\sigma)Rx, x\rangle \, d\sigma, R \in \mathcal{H}_2.$$

Fie ecuaţia Lyapunov

$$\frac{dQ(s)}{ds} + A^*(s)Q(s) + Q(s)A(s) + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(s)Q(s)G_i(s) = 0 \tag{3.2.10}$$

considerată in $L(H)$. Ecuaţia aproximantă a ecuaţiei (3.2.10) este

(3.2.11)
$$\frac{dQ_n(s)}{ds} + A_n^*(s)Q_n(s) + Q_n(s)A_n(s) + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(s)Q_n(s)G_i(s) = 0$$

unde $A_n(s)$ sunt aproximările Yosida ale lui $A(s)$.

Folosind Lema 3.2.1 pentru $B(r) = 0$ şi rezultă că (3.2.11) are o soluţie clasică unică $Q_n(s)$ astfel incât $Q_n(t) = R$, pe care o vom nota $Q_n(t, s; R)$, soluţie care satisface ecuaţia integrală

$$\langle Q_n(t, s; R)x, x\rangle - \langle Rx, x\rangle = \int_s^t \langle L_n^*(\sigma)Q_n(t, \sigma; R)x, x\rangle \, d\sigma. \tag{3.2.12}$$

Dacă $R \in \mathcal{H}_2, R \geq 0$, scădem relaţiile (3.2.9) şi (3.2.12) şi avem
$\langle [\mathcal{U}_n^*(t, s)R - Q_n(t, s; R)]\, x, x\rangle = \int_s^t \langle L_n^*(\sigma)\, [\mathcal{U}_n^*(t, \sigma)R - Q_n(t, \sigma; R)]\, x, x\rangle \, d\sigma.$
Ţinând cont de faptul că $\mathcal{U}_n^*(t, s)R, Q_n(t, s; R) \in \mathcal{E}$ şi
$$\sup_{\sigma\in[0,t]} \|L_n^*(\sigma)\| = \sup_{\sigma\in[0,t]} \left(\sup_{S\in\mathcal{E}, \|s\|=1} \|L_n(\sigma)S\| \right) < \infty \ ,$$
conform principiului mărginirii uniforme, deducem
$\|\mathcal{U}_n^*(t, s)R - Q_n(t, s; R)\| \leq \int_s^t \sup_{\sigma\in[0,t]} \|L_n^*(\sigma)\| \, \|\mathcal{U}_n^*(t, \sigma)R - Q_n(t, \sigma; R)\| \, d\sigma.$
Aplicând inegalitatea lui Gronwall, vedem că pentru orice $0 \leq s \leq t$

$$\text{dacă } R \in \mathcal{H}_2, R \geq 0 \text{ atunci } Q_n(t, s; R) = \mathcal{U}_n^*(t, s)(R) \tag{3.2.13}$$

şi, conform (3.2.8), deducem că

(3.2.14) $Q_n(t, s; R)$ este continuă in topologia normei pe $0 \leq s \leq t$.

Deoarece $\mathcal{U}_n^*$ este un operator liniar in $\mathcal{H}_2$ vedem că funcţia $R \to Q_n(t, s; R)$ este liniară pe conul $L^+(\mathcal{H}_2)$. Aceasta inseamnă că

$$Q_n(t, s; \alpha R + \beta S) = \alpha Q_n(t, s; R) + \beta Q_n(t, s; S) \tag{3.2.15}$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in R_+$ şi $R, S \in \mathcal{H}_2$, $R, S \geq 0$.

Aplicând Lema 3.2.1 putem trece la limită pentru $n \to \infty$ in ultima inegalitate şi deducem că $Q(t,s;\alpha R + \beta S) = \alpha Q(t,s;R) + \beta Q(t,s;S)$ pentru toţi α,$\beta \in R_+$ şi $R, S \in \mathcal{H}_2$, $R, S \geq 0$.

2.3. Soluţii de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale liniare stocastice şi reprezentările lor in raport cu soluţiile ecuaţiilor Lyapunov. Fie ξ o variabilă aleatoare cu valori in H astfel incât $E\left\|\xi\right\|^2 < \infty$. Se cunoaşte faptul că $E(\xi \otimes \xi)$ este un operator nenegativ din $\mathcal{N}$ (conform Lemei 1.3.5).

Dacă $y_n(t,s;\xi)$, $\xi \in L_s^2(H)$ este soluţia clasică a ecuaţiei (1.4.3) atunci deoarece $E\left\|y_n(t,s;\xi)\right\|^2 < \infty$, este uşor de văzut că

$E[y_n(t,s;\xi) \otimes y_n(t,s;\xi)] \in \mathcal{N} \subset \mathcal{H}_2$ pentru orice $t \geq s \geq 0, \xi \in L_s^2(H)$.

Observaţia 3.2.5. *$E[y_n(.,s;\xi) \otimes y_n(.,s;\xi)] \in C([s,\infty), L(H))$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.*

Demonstraţie. Fie $t, \tau \in [s,\infty]$. Avem

$$\left\|E[y_n(t,s;\xi) \otimes y_n(t,s;\xi)] - E[y_n(\tau,s;\xi) \otimes y_n(\tau,s;\xi)]\right\| \leq$$
$$\left\|E\left[y_n(t,s;\xi) - y_n(\tau,s;\xi)\right] \otimes [y_n(t,s;\xi) - y_n(\tau,s;\xi)]\right\| +$$
$$+2\left\|E\left\{y_n(\tau,s;\xi) \otimes [y_n(t,s;\xi) - y_n(\tau,s;\xi)]\right\}\right\| \leq$$
$$E\left\|y_n(t,s;\xi) - y_n(\tau,s;\xi)\right\|^2 +$$
$$2\left[E\left\|y_n(\tau,s;\xi)\right\|^2\right]^{1/2}\left[E\left\|y_n(t,s;\xi) - y_n(\tau,s;\xi)\right\|^2\right]^{1/2}.$$

Folosind inegalitatea de mai sus şi Lema 1.4.6 rezultă că

$\lim\limits_{t\to\tau}\left\|E[y_n(t,s;\xi) \otimes y_n(t,s;\xi)] - E[y_n(\tau,s;\xi) \otimes y_n(\tau,s;\xi)]\right\| = 0$. Am obţinut concluzia. $\square$

Propoziţia de mai jos este necesară pentru demonstrarea celor mai importante rezultate ale acestui paragraf (pentru cazul finit dimensional se poate vedea [**63**]).

Propoziţia 3.2.6. [**67**]*Dacă* $y_n(t,s;\xi)$, $\xi \in L_s^2(H)$ *este soluţia clasică a ecuaţiei (1.4.3) atunci* $E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]$ *este unica soluţie a ecuaţiei*

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = A_n(t)P_n(t) + P_n(t)A_n^*(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)P_n(t)G_i^*(t) \tag{3.2.16}$$

$$P_n(s) = E(\xi \otimes \xi), \xi \in L_s^2(H).$$

Demonstraţie. Fie u din H fixat. Considerăm funcţia

$F_u \overset{not}{=} F : \mathbf{R}_+ \times H \to \mathbf{R}$, $F(t,x) = \langle x \otimes x(u), u\rangle$.

Avem $F_t(t,x) = 0$, $F_x(t,x)(h) = \langle x \otimes h(u), u\rangle + \langle h \otimes x(u), u\rangle$ şi

$F_{xx}(t,x)(h,k) = \langle k \otimes h(u), u\rangle + \langle h \otimes k(u), u\rangle$.

Acum este clar că funcţia F şi derivatele sale parţiale F_t, F_x, F_{xx} sunt uniform continue pe orice submulţime mărginită a mulţimii $[s,T]\times H$, $0 \le s \le T$. Astfel, putem folosi formula lui Ito (Teorema 1.2.28) pentru F şi $y_n(t,s;\xi), s \le T$ şi avem

$$\langle y_n(t,s;\xi) \otimes y_n(t,s;\xi)(u), u\rangle - \langle \xi \otimes \xi(u), u\rangle =$$

$$= \int_s^t \langle A_n(r)y_n(r,s;\xi) \otimes y_n(r,s;\xi)(u), u\rangle +$$

$$+ \langle y_n(r,s;\xi) \otimes A_n(r)y_n(r,s;\xi)(u), u\rangle +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \langle G_i(r)y_n(r,s;\xi) \otimes G_i(r)y_n(r,s;\xi)(u), u\rangle \, dr +$$

$$+ \int_s^t \langle y_n(r,s;\xi) \otimes G_i(r)y_n(r,s;\xi)(u), u\rangle +$$

$$+ \langle G_i(r)y_n(r,s;\xi) \otimes y_n(r,s;\xi)(u), u\rangle \, dw_i(r)$$

Conform proprietăţilor integralei stocastice deducem că

$$0 = E\int_s^t \langle y_n(r,s;\xi)\otimes G_i(r)y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle +$$

$$\langle G_i(r)y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle\, dw_i(r).$$

Astfel, trecând la medie in formula lui Ito, avem

$$E\,\langle y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)(u),u\rangle - E\,\langle \xi\otimes\xi(u),u\rangle =$$

$$E\int_s^t \langle A_n(r)y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle +$$

$$\langle y_n(r,s;\xi)\otimes A_n(r)y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle +$$

$$\sum_{i=1}^m \langle G_i(r)y_n(r,s;\xi)\otimes G_i(r)y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle\, dr.$$

Notăm

$$X_{s,u}(r,\omega) = \langle A_n(r)y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle +$$

$$\langle y_n(r,s;\xi)\otimes A_n(r)y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle +$$

$$\sum_{i=1}^m \langle G_i(r)y_n(r,s;\xi)\otimes G_i(r)y_n(r,s;\xi)(u),u\rangle\,.$$

Din Lema 1.4.3 , Lema 1.4.6 şi ipoteză rezultă că $r\to E\,|X_{s,u,n}(r,\omega)|$ este continuă pe $[s,t]$ şi de aici $\int_s^t E\,|X_{s,u,n}(r,\omega)|\, dr < \infty$. Acum, din măsurabilitatea lui $X_{s,u,n}(r,\omega)$ şi conform teoremei lui Fubini avem $E(\int_s^t X_{s,u,n}(r,\omega)dr) = \int_s^t E(X_{s,u,n}(r,\omega))dr.$

Este uşor de văzut că $A(a)\otimes b = A(a\otimes b)$ şi $a\otimes A(b) = a\otimes bA^*$ oricare ar fi $a,b\in\ H$ şi $A\in L(H)$. Astfel,

$$E\,\langle y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)(u),u\rangle - E\,\langle \xi\otimes\xi(u),u\rangle =$$

$$\int_s^t E\left\langle y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)(u), A_n^*(r)u\right\rangle +$$
$$E\left\langle y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)(A_n^*(r)u), u\right\rangle +$$
$$\sum_{i=1}^m E\left\langle y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)(G_i^*(r)u), G_i^*(r)u\right\rangle dr.$$

Deoarece $E\left\|y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)(h)\right\| \leq E\left\|y_n(r,s;\xi)\right\|^2\|h\| < \infty$ oricare ar fi $h\in\ H$, putem permuta media şi produsul scalar in ultima ecuaţie şi obţinem

$$\langle E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)](u), u\rangle - \langle E[\xi\otimes\xi](u), u\rangle =$$

$$\int_s^t \langle E[y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)](u), A_n^*(r)u\rangle +$$
$$\langle E[y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)](A_n^*(r)u), u\rangle +$$
$$\sum_{i=1}^m \langle E[y_n(r,s;\xi)\otimes y_n(r,s;\xi)](G_i^*(r)u), G_i^*(r)u\rangle\, dr.$$

Dacă notăm $P_n(t) = E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]$ atunci, conform consideraţiilor de la inceputul acestui paragraf, observăm că $P_n(t)$ este nenegativ şi avem

$$\langle P_n(t)u, u\rangle - \langle E[\xi\otimes\xi](u), u\rangle = \tag{3.2.17}$$

$$= \int_s^t \langle A_n(r)P_n(r)u, u\rangle + \langle P_n(r)A_n^*(r)u, u\rangle +$$
$$\sum_{i=1}^m \langle G_i(r)P_n(r)G_i^*(r)u, u\rangle\, dr.$$

Conform lemelor L.3.2.3, L.3.2.2 şi rezultatelor din paragraful precedent deducem că ecuaţia (3.2.16) considerată in $\mathcal{H}_2$ are o soluţie clasică unică $\mathcal{U}_n(t,s)E\left(\xi\otimes\xi\right),$ unde $\mathcal{U}_n(t,s)$ este operatorul de evoluţie generat de L_n. Mai mult, aceasta satisface următoarea ecuaţie integrală $\mathcal{U}_n(t,s)E\left(\xi\otimes\xi\right)=E\left(\xi\otimes\xi\right)+\int_s^t L_n(r)\mathcal{U}_n(r,s)E\left(\xi\otimes\xi\right)dr$. Atunci

$$\left\langle \mathcal{U}_n(t,s)E\left(\xi\otimes\xi\right),u\otimes u\right\rangle_2=\left\langle E\left(\xi\otimes\xi\right),u\otimes u\right\rangle_2+\int_s^t\left\langle L_n(r)\mathcal{U}_n(r,s)E\left(\xi\otimes\xi\right),u\otimes u\right\rangle_2 dr$$

sau echivalent

$$\left\langle \mathcal{U}_n(t,s)E\left(\xi\otimes\xi\right)u,u\right\rangle=\left\langle E\left(\xi\otimes\xi\right)u,u\right\rangle+\int_s^t\left\langle L_n(r)\mathcal{U}_n(r,s)E\left(\xi\otimes\xi\right)u,u\right\rangle dr.$$

Scăzând (3.2.17) şi ultima ecuaţie avem

$$\left\langle\left[\mathcal{U}_n(t,s)E\left(\xi\otimes\xi\right)-P_n(t)\right]u,u\right\rangle=\int_s^t\left\langle L_n(r)\left[\mathcal{U}_n(r,s)E\left(\xi\otimes\xi\right)-P_n(r)\right]u,u\right\rangle dr.$$

Deoarece, conform principiului mărginirii uniforme, există constanta $l_T>0$ astfel incât $\|L_n(t)\|\le l_T$ oricare ar fi $t\in[0,T]$ iar $\mathcal{U}_n(t,s)E\left(\xi\otimes\xi\right),$ $P_n(t)\in\mathcal{E}$ putem aplica inegalitatea lui Gronwal pentru a deduce că

$$E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]=\mathcal{U}_n(t,s)E[\xi\otimes\xi] \tag{3.2.18}$$

Cum T este arbitrar rezultă concluzia. □

Rezultatul următor este cunoscut ([**2**]) dar, deoarece demonstraţia nu este prea lungă, il vom prezenta cu demonstraţie.

Lema 3.2.7. *Dacă H este un spaţiu Hilbert separabil atunci spaţiul $B_1=\{x\in H,\|x\|=1\}$ este separabil.*

Demonstraţie. Vom arăta că există un şir $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ dens in B_1. Fie $x\in B_1$. Deoarece H este separabil, există un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ dens in H. Deci există un subşir al lui x_n, notat tot x_n, astfel incât $x_n\underset{n\to\infty}{\to}x$. Avem $\frac{x_n}{\|x_n\|}\underset{n\to\infty}{\to}x$. Într-adevăr, $\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-x\right\|\le\frac{\|x_n-x\|+\|x\|\left|\|x_n\|-\|x\|\right|}{\|x_n\|}$ şi cum $\|x_n\|\underset{n\to\infty}{\to}\|x\|=1$, deducem că există $N_{\frac{1}{2}}\in\mathbf{N}$ astfel incât să avem $\|x_n\| \geq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $n \geq N_{\frac{1}{2}}$ şi respectiv $\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - x\right\| \leq 2(\|x_n - x\| + \|x\| \, |\|x_n\| - \|x\||)$, oricare ar fi $n \geq N_{\frac{1}{2}}$. De aici rezultă uşor concluzia. $\square$

Teorema de mai jos dă o reprezentare a soluţiei (de evoluţie) a ecuaţiei (1.4.1), folosind soluţia ecuaţiei Lyapunov (3.2.10).

Teorema 3.2.8. [**67**]*Fie V un alt spaţiu Hilbert separabil, real şi $B \in L(H, V)$. Dacă $y(t, s; \xi)$, $\xi \in L_s^2(H)$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) şi $Q(t, s, R)$ este unica soluţie de evoluţie a ecuaţiei (3.2.10), cu condiţia finală $Q(t) = R \geq 0$ atunci*

a) $\langle E[y(t, s; \xi) \otimes y(t, s; \xi)]u, u\rangle = TrQ(t, s; u \otimes u)E\left(\xi \otimes \xi\right)$ *oricare ar fi* $u \in H, \xi \in L_s^2(H)$.

b)

$$E\left\|By(t, s; \xi)\right\|^2 = TrQ(t, s; B^*B)E\left(\xi \otimes \xi\right)$$

pentru toţi $\xi \in L_s^2(H)$.

Demonstraţie. .a) Fie $u \in H, \xi \in L_s^2(H)$ şi $y_n(t, s; \xi)$ soluţia clasică a ecuaţiei (1.4.3).Din (3.2.18) şi Observaţia 1.1.10 deducem că

$$< E[y_n(t, s; \xi) \otimes y_n(t, s; \xi)]u, u >=< \mathcal{U}_n(t, s)E\left(\xi \otimes \xi\right) u, u >=$$

$$Tr\mathcal{U}_n(t, s)E\left(\xi \otimes \xi\right)(u \otimes u)$$

.Deoarece $E\left(\xi \otimes \xi\right)$, $u \otimes u \in \mathcal{H}_2$, obţinem

$$\begin{aligned} Tr\mathcal{U}_n(t, s)E\left(\xi \otimes \xi\right)(u \otimes u) &=< u \otimes u, \mathcal{U}_n(t, s)E\left(\xi \otimes \xi\right) >_2= \\ &=< \mathcal{U}_n^*(t, s)(u \otimes u), E\left(\xi \otimes \xi\right) >_2 \\ &= TrE\left(\xi \otimes \xi\right)[\mathcal{U}_n^*(t, s)(u \otimes u)]. \end{aligned}$$

Conform (1.1.1) avem $TrE\left(\xi \otimes \xi\right)[\mathcal{U}_n^*(t, s)(u\otimes u)] = Tr[\mathcal{U}_n^*(t, s)(u\otimes u)]E\left(\xi \otimes \xi\right)$. Deci

$$< E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]u,u >= Tr[\mathcal{U}_n^*(t,s)(u\otimes u)]E\,(\xi\otimes\xi)\,.$$

Din (3.2.13) rezultă $\mathcal{U}_n^*(t,s)(u\otimes u) = Q_n(t,s;u\otimes u)$ unde Q_n este soluţia clasică a ecuaţiei (3.2.11) cu condiţia finală $Q_n(t) = u\otimes u$ şi

$$\langle E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]u,u\rangle = TrQ_n(t,s;u\otimes u)E\,(\xi\otimes\xi) \tag{3.2.19}$$

Acum este suficient să trecem la limită in relaţia de mai sus pentru $n\to\infty$ şi obţinem concluzia.

Într-adevăr, deoarece $Q_n(t,s;u\otimes u) \underset{n\to\infty}{\to} Q(t,s;u\otimes u)$ in topologia tare (Lema 3.2.1) atunci, conform Teoremei 1.1.2 (punctul e)), deducem că

$Q_n(t,s;u\otimes u)E\,(\xi\otimes\xi) \underset{n\to\infty}{\to} Q(t,s;u\otimes u)E\,(\xi\otimes\xi)$ in $C_1(H)$. Conform Observaţiei 1.1.3, avem

$$TrQ_n(t,s;u\otimes u)E\,(\xi\otimes\xi) \underset{n\to\infty}{\to} TrQ(t,s;u\otimes u)E\,(\xi\otimes\xi)\,.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
&|\langle\{E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)] - E[y(t,s;\xi)\otimes y(t,s;\xi)]\}u,u\rangle| = \\
&\left|E\,\langle y_n(t,s;\xi),u\rangle^2 - E\,\langle y(t,s;\xi),u\rangle^2\right| = \\
&\left|E(\langle y_n(t,s;\xi),u\rangle^2 - \langle y(t,s;\xi),u\rangle^2)\right| = \\
&|E(\langle y_n(t,s;\xi)-y(t,s;\xi),u\rangle^2 - 2\,\langle y_n(t,s;\xi)-y(t,s;\xi),u\rangle\,\langle y(t,s;\xi),u\rangle)| \le \\
&E\,\|y_n(t,s;\xi)-y(t,s;\xi)\|^2\,\|u\|^2 + \\
&2E(\|y_n(t,s;\xi)-y(t,s;\xi)\|\,\|y(t,s;\xi)\|)\,\|u\|^2 \\
&\{E\,\|y_n(t,s;\xi)-y(t,s;\xi)\|^2 + \\
&2(E\,\|y_n(t,s;\xi)-y(t,s;\xi)\|^2\,E\,\|y(t,s;\xi)\|^2)^{1/2}\}\,\|u\|^2
\end{aligned}$$

oricare ar fi $u\in H$. Aplicăm Lema 1.4.6 şi rezultă că

$\langle E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]u,u\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle E[y(t,s;\xi)\otimes y(t,s;\xi)]u,u\rangle.$

Trecând la limită pentru $n\to\infty$ in (3.2.19) obţinem

$\langle E[y(t,s;\xi)\otimes y(t,s;\xi)]u,u\rangle = TrQ(t,s;u\otimes u)E(\xi\otimes\xi)$ oricare ar fi $u\in H, \xi\in L_s^2(H)$. Demonstraţia lui a) este terminată .

b) Fie $\xi\in L_s^2(H)$. Este suficient să demonstrăm că

$E\|By_n(t,s;\xi)\|^2 = TrQ_n(t,s;B^*B)E(\xi\otimes\xi)$ oricare ar fi $n\in \mathbf{N}^*$, deoarece, trecând la limită in ultima egalitate pentru $n\to\infty$ şi aplicând Lemele 1.4.6, 3.2.1, 1.3.5 şi Observaţia 1.1.3 rezultă concluzia.

Fie $n\in \mathbf{N}^*$ fixat. Conform Lemei 1.3.5 avem

$$E\|By_n(t,s;\xi)\|^2 = \|BE[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]B^*\|_1 . \tag{3.2.20}$$

Dacă $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ este o bază ortonormată a lui V atunci
$\|BE[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]B^*\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\langle E[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]B^*e_i, B^*e_i\rangle .$

Din (3.2.19) obţinem
$\|BE[y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]B^*\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} TrQ_n(t,s;B^*e_i\otimes B^*e_i)E(\xi\otimes\xi).$

Deoarece $B^*e_i\otimes B^*e_i\in\mathcal{H}_2$ şi $B^*e_i\otimes B^*e_i\geq 0$ oricare ar fi $i\in\mathbf{N}^*$, folosim (3.2.15) şi ultima egalitate pentru a obţine:

$$\|BE[\,y_n(t,s;\xi)\otimes y_n(t,s;\xi)]B^*\|_1 = \tag{3.2.21}$$

$$= \lim_{p\to\infty} TrQ_n(t,s;\sum_{i=1}^{p} B^*e_i\otimes e_iB)E(\xi\otimes\xi) .$$

Este clar că şirul de operatori nenegativi $B_p = \sum\limits_{i=1}^{p} B^*e_i\otimes e_iB$ este monoton crescător şi mărginit superior deoarece

$$\langle B_px,x\rangle = \sum_{i=1}^{p}\langle Bx,e_i\rangle^2 \leq \|Bx\|^2 = \langle B^*Bx,x\rangle .$$

Atunci putem folosi propoziţia P.4.64 din [**14**] şi deducem că B_p converge in topologia tare la operatorul nenegativ $\widetilde{B}\in L^+(H)$.

Deoarece $\left\langle \widetilde{B}x,x\right\rangle = \lim\limits_{p\to\infty}\langle B_px,x\rangle = \langle B^*Bx,x\rangle$ rezultă că $\widetilde{B} = B^*B$.

Conform Lemei 3.2.1 (deoarece şirul B_p este monoton crescător şi $B_p \leq B^*B$ oricare ar fi $p \in \mathbf{N}^*$) deducem că şirul $\{Q_n(t,s;B_p\}_{p\in\mathbf{N}^*}$ este monoton crescător şi $Q_n(t,s;B_p) \leq Q_n(t,s;B^*B)$ oricare ar fi $p \in \mathbf{N}^*$.

Atunci $\{Q_n(t,s;B_p)\}_{p\in\mathbf{N}^*}$ converge tare la operatorul nenegativ

$Q_n(t,s) \in L^+(H)$. Este clar că $Q_n(t,s;B_p)$ satisface ecuaţia integrală

$$Q_n(t,s;B_p)x = U_n^*(t,s)B_pU_n(t,s)x +$$
$$\sum_{i=1}^{m}\int_s^t U_n^*(r,s)G_i^*(r)Q_n(t,r;B_p)G_i(r)U_n(r,s)xdr$$

oricare ar fi $x \in H$, unde $U_n(t,s)$ este operatorul de evoluţie relativ la $A_n(t)$. Putem scrie

$\langle Q_n(t,s;B_p)x,x\rangle = \langle B_pU_n(t,s)x, U_n(t,s)x\rangle +$
$+\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_s^t \langle Q_n(t,r;B_p)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle\, dr.$

Deoarece $B_p \in \mathcal{H}_2$ şi $B_p \geq 0$ deducem din (3.2.14) şi ipoteză că

$r \to \langle Q_n(t,r;B_p)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle$ este continuă.

Cum $\langle Q_n(t,r)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle =$

$= \lim\limits_{p\to\infty} \langle Q_n(t,r;B_p)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle$ oricare ar fi $r \in [s,t]$, rezultă că $r \to \langle Q_n(t,r)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle$ este o funcţie Boreliană nenegativă, definită pe $[s,t]$ şi mărginită superior de o funcţie continuă, anume $r \to \langle Q_n(t,r;B^*B)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle$.

Conform teoremei convergenţei monotone, putem trece la limită, pentru $p \to \infty$, in ultima ecuaţie integrală şi avem

$\langle Q_n(t,s)x,x\rangle = \langle B^*BU_n(t,s)x, U_n(t,s)x\rangle +$
$+\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_s^t \langle Q_n(t,r)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle\, dr$, unde integrala de mai sus este in sens Lebesgue. Deoarece $Q_n(t,r;B^*B)$ satisface ecuaţia

$\langle Q_n(t,s;B^*B)x,x\rangle = \langle B^*BU_n(t,s)x, U_n(t,s)x\rangle +$

$+\sum_{i=1}^{m}\int_s^t \langle Q_n(t,r;B^*B)G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle\, dr$, avem

$$\langle [Q_n(t,s;B^*B) - Q_n(t,s)]x, x\rangle = \tag{3.2.22}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\int_s^t \langle [Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)]G_i(r)U_n(r,s)x, G_i(r)U_n(r,s)x\rangle\, dr.$$

Aplicaţia $x \to \langle [Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)]x, x\rangle$, $x \in H$ este continuă iar funcţia $r \to \langle [Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)]x, x\rangle$, $r \in [s,t]$ este măsurabilă Borel (ca limită de funcţii continue). Putem deduce, conform Lemei 3.2.7, că $\|Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)\| = \sup\limits_{y_n \in B_1} \langle [Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)]y_n, y_n\rangle$. Deci $r \to \|Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)\|$, $r \in [s,t]$ este o funcţie măsurabilă Borel.

Din $0 \le Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r) \le Q_n(t,r;B^*B)$ deducem că $r \to \|Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)\|$ este mărginit pe $[s,t]$.

Acum este clar că $r \to \|Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)\| \, \|U_n(r,s)\|^2$ este integrabilă Lebesgue şi, conform (3.2.22), avem
$\|Q_n(t,s;B^*B) - Q_n(t,s)\| \le \sum_{i=1}^{m} \widetilde{G}_i \int_s^t \|Q_n(t,r;B^*B) - Q_n(t,r)\| \, \|U_n(r,s)\|^2\, dr$
unde $\widetilde{G}_i = \sup\limits_{r\in[s,t]} \|G_i(r)\|$ (există conform principiului mărginirii uniforme).

Aplicăm Lema lui Gronwall şi obţinem

$$\|Q_n(t,s;B^*B) - Q_n(t,s)\| = 0.$$

Astfel, am demonstrat că $Q_n(t,s;B_p)x \underset{p\to\infty}{\to} Q_n(t,s;B^*B)x$ oricare ar fi $x \in H$. Acum din (3.2.20), (3.2.21), Lema 1.3.5, Observaţia 1.1.3 şi ultima egalitate obţinem

$E\,\|By_n(t,s;\xi)\|^2 = TrQ_n(t,s;B^*B)E\,(\xi \otimes \xi)$. Demonstraţia este completă. $\square$

O consecinţă diretă a teoremei de mai sus este corolarul de mai jos.

Corolarul 3.2.9. *Presupunem că avem indeplinite ipotezele teoremei de mai sus. Dacă* $\xi \in L_s^2(H)$ *atunci avem* $E\|y(t,s;\xi)\|^2 = TrQ(t,s;I)E(\xi \otimes \xi)$.

3. Stabilitatea exponenţială uniformă

În cele ce urmează, vom defini noţiunea de stabilitate exponenţială uniformă, vom da o caracterizare deterministă şi o definiţie echivalentă a acesteia.

Definiţia de mai jos este dată conform [**12**]. Facem observaţia că in această lucrare sunt considerate sisteme autonome.

Definiţia 3.3.1. Fie $y(t,s;x)$ soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1). Spunem că (1.4.1) este *uniform exponenţial stabilă* dacă există constantele $M \geq 1$, $\omega > 0$ astfel *incât* $E\|y(t,s;x)\|^2 \leq Me^{-\omega(t-s)}\|x\|^2$ oricare ar fi $t \geq s \geq 0$ şi $x \in H$. Dacă folosim notaţia $\{A; G_i\}$ pentru (1.4.1) atunci vom spune că $\{A; G_i\}$ este uniform exponenţial stabilă.

Teorema de mai jos reprezintă rezultatul principal al acestui subparagraf. Ea stabileşte condiţii necesare şi suficiente pentru ca ecuaţia (1.4.1) să fie uniform exponenţial stabilă folosind teorema de reprezentare a soluţiilor de evoluţie dată in subparagraful precedent.

Teorema 3.3.2. [**67**] *Dacă* $y(t,s;x)$, $x \in H$ *este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) şi* $Q(t,s,R)$ *este soluţia de evoluţie unică a lui (3.2.10) cu condiţia finală* $Q(t) = R \geq 0$ *atunci ecuaţia (1.4.1) este uniform exponenţial stabilă dacă şi numai dacă există constantele* $M \geq 1$, $\omega > 0$ *astfel incât* $Q(t,s;I) \leq Me^{-\omega(t-s)}I$ *oricare ar fi* $t \geq s \geq 0$, *unde* I *este operatorul identic pe* H.

Demonstraţie. Din Corolarul 3.2.9 rezultă

$E\|y(t,s;x)\|^2 = \langle Q(t,s;I)x,x\rangle$, unde I este operatorul identic. Conform Definiţiei 3.3.1 obţinem concluzia $\square$

Observaţia 3.3.3. *Dacă ecuaţia (1.4.1) este uniform exponenţial stabilă atunci operatorul de evoluţie $U(t,s)$ este uniform exponenţial stabil, adică există constantele $M \geq 1$, $\omega > 0$ astfel incât*

$\|U(t,s)\| \leq Me^{-\omega(t-s)}$ oricare ar fi $t \geq s \geq 0$.

Propoziţia 3.3.4. *Dacă $y(t,s;\xi), \xi \in L_s^2(H)$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente :*

a)(1.4.1) este uniform exponenţial stabilă .

b) există constantele $M \geq 1, \omega > 0$ astfel incât

$$E\|y(t,s;\xi)\|^2 \leq Me^{-\omega(t-s)}E\|\xi\|^2$$

oricare ar fi $t \geq s \geq 0$ şi $\xi \in L_s^2(H)$.

Demonstraţie. Implicaţia $b) \Rightarrow a)$ este evidentă. Vom demonstra $a) \Rightarrow b)$. Fie $\xi \in L_s^2(H)$ şi $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \otimes e_i, c_i \geq 0$ descompunerea Hilbert-Schmidt a lui $E(\xi \otimes \xi)$. Dacă ecuaţia (1.4.1) este uniform exponenţial stabilă, in sensul Definiţiei 3.3.1 atunci este uşor de văzut că $TrQ(t,s;I)E(\xi\otimes \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle Q(t,s;I)e_i, e_i\rangle$ şi, conform teoremei de mai sus, există constantele $M \geq 1, \omega > 0$ astfel incât $TrQ(t,s;I)E(\xi\otimes\xi) \leq Me^{-\omega(t-s)} \sum_{i=1}^{\infty} c_j$ oricare ar fi $t \geq s \geq 0$. Din Teorema 3.2.8 şi inegalitatea de mai sus rezultă

$$E\|y(t,s;\xi)\|^2 \leq Me^{-\omega(t-s)} \|E(\xi \otimes \xi)\|_1$$

şi $E\|y(t,s;\xi)\|^2 \leq Me^{-\omega(t-s)}E\|\xi\|^2$. Demonstraţia a fost incheiată. $\square$

Conform observaţiei precedente, vedem că Definiţiei 3.3.1 este echivalentă cu cea introdusă in [**10**].

În continuare vom prezenta o altă caracterizare a stabilităţii exponenţiale uniforme, dată de Da Prato şi Ichikawa in [**11**] (T.4, C.3) pe baza unui rezultat din [**29**] (T.2.2 din [**29**]). Considerăm operatorul $\widehat{V}(t,s)$: $L_s^2(H) \to L_t^2(H)$ definit de formula $\widehat{V}(t,s)(\xi) = y(t,s;\xi)$, unde $y(t,s;\xi)$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) ($\widehat{V}$ se numeşte soluţia fundamentală stocastică a ecuaţiei (1.4.1), conform [**11**])).

Teorema 3.3.5. *Fie g o funcţie continuă cu valori strict pozitive definită pe $\mathbf{R}_+$. Dacă $\widehat{V}(t,s)$ are proprietatea*

$$E\left\|\widehat{V}(t,s)\xi\right\|^2 \leq g(t-s)E\left\|\xi\right\|^2 \tag{3.3.1}$$

atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) există constantele $M \geq 1$, $\omega > 0$ astfel incât

$$E\left\|\widehat{V}(t,s)\xi\right\|^2 \leq Me^{-\omega(t-s)}E\left\|\xi\right\|^2$$

oricare ar fi $t \geq s \geq 0$

b) există o soluţie de evoluţie unică $Q \in C_b([0,\infty), L^+(H))$ a ecuaţiei Lyapunov (3.2.1) in care $B(s) = I$, oricare ar fi $s \in \mathbf{R}_+$.

Observaţia 3.3.6. *Dacă operatorul de evoluţie generat de familia $A(t)$ este cu creştere exponenţială atunci avem indeplinită condiţia (3.3.1), conform Lemei 1.4.9.*

4. Observabilitatea uniformă

4.1. Definiţie şi caracterizare. În acest subparagraf este introdusă noţiunea de observabilitate uniformă a ecuaţiilor diferenţiale stocastice (pentru cazul finit dimensional se poate vedea [**48**]) şi a fost obţinută o caracterizare deterministă a acesteia.

Presupunem că are loc P_1, $G_i \in C_s([0,\infty), L(H)), i = 1, ..., m$ şi $C \in C_s([0,\infty), L(H,V))$.

Fie $x \in H$. Considerăm ecuaţia (1.4.1) impreună cu relaţia de observare

$$z(t) = C(t)y(t,s,x), t \geq s \geq 0 \tag{3.4.1}$$

Sistemul (1.4.1),(3.4.1) va fi notat $\{A, C; G_i\}$.

Fie $T, s \in \mathbf{R}$ astfel incât $T > 0$, $T \geq s \geq 0$. Deoarece $y(., s; x) \in C([s,T]; L^2(\Omega, H))$ oricare ar fi $x \in H$ rezultă că

$C(.)y(., s; x) \in C([s,T]; L^2(\Omega, V))$.

Într-adevăr $E\left\|C(t)y(t,s;x) - C(\tau)y(\tau,s;x)\right\|^2 \leq$

$\leq E\left\|[C(t) - C(\tau)]y(t,s;x)\right\|^2 + E\left\|C(\tau)[y(t,s;x) - y(\tau,s;x)]\right\|^2$ oricare ar fi $t, \tau \in [s,T]$

Din faptul că $C \in C_s([0,\infty), L(H,V))$, deducem, conform principiului mărginirii uniforme, că $\sup\limits_{t\in[s,T]} \|C(t)\| = \widetilde{C} < \infty$. Astfel

$$E\left\|C(t)y(t,s;x) - C(\tau)y(\tau,s;x)\right\|^2 \leq E\left\|[C(t) - C(\tau)]y(t,s;x)\right\|^2 + \widetilde{C}E\left\|y(t,s;x) - y(\tau,s;x)\right\|^2.$$

Făcând pe τ să tindă la "t" in ultima inegalitate rezultă din ipoteză că $\lim\limits_{\tau\to t} E\left\|C(t)y(t,s;x) - C(\tau)y(\tau,s;x)\right\|^2 = 0$. Am obţinut concluzia

Observăm că

$$t \to E\left\|C(t)y(t,s;x)\right\|^2 \text{ este continuă pe } [s,T]. \tag{3.4.2}$$

Acum se poate introduce definiţia observabilităţii uniforme (a se vedea [**48**]) .

Definiţia 3.4.1. Spunem că sistemul $\{A, C; G_i\}$ este *uniform observabil* dacă există $\tau > 0$ şi $\gamma > 0$ astfel incât

$E\int\limits_s^{s+\tau} \left\|C(t)y(t,s;x)\right\|^2 dt \geq \gamma \|x\|^2$ oricare ar fi $s \in \mathbf{R}_+$ şi $x \in H$.

Teorema următoare dă o caracterizare deterministă a observabilităţii uniforme şi reprezintă cel mai important rezultat al acestui paragraf.

Teorema 3.4.2. [**67**]*Presupunem că are loc* P_1 *şi că* $G_i \in C_s([0,\infty), L(H))$. *Dacă* $C \in C_s([0,\infty), L(H,V))$ *atunci sistemul* $\{A, C; G_i\}$ *is uniform observabil dacă şi numai dacă există* $\tau > 0$ *şi* $\gamma > 0$ *astfel incât*

$$\int_s^{s+\tau} Q(t,s;C^*(t)C(t))dt \geq \gamma I$$

oricare ar fi $s \in \mathbf{R}_+$ *unde* I *este operatorul identic pe* H.

Demonstraţie. Fie $x \in H$. Aplicăm Teorema 3.2.8 b) şi avem

$E\left\|C(t)y(t,s;x)\right\|^2 = \langle Q(t,s;C^*(t)C(t))x, x\rangle$.

Deoarece $t \to E\left\|C(t)y(t,s;x)\right\|^2$ este continuă, deducem că $\int_s^{s+\tau} E\left\|C(t)y(t,s;x)\right\|^2 dt < \infty$. Din Definiţia 3.4.1 şi teorema lui Fubini rezultă concluzia

Corolarul 3.4.3. $\{A, C; G_i\}$ *este uniform observabil dacă şi numai dacă există* $\tau > 0$ *şi* $\gamma > 0$ *astfel incât*

$$E\int_s^{s+\tau} \left\|C(t)y(t,s;\xi)\right\|^2 dt \geq \gamma E\left\|\xi\right\|^2 \tag{3.4.3}$$

pentru toţi $s \in \mathbf{R}_+$ *şi* $\xi \in L_s^2(H)$.

Demonstraţie. Condiţia suficientă este evidentă . Trebuie să demonstrăm necesitatea. Din Teorema 3.2.8 rezultă că

$E\left\|C(t)y(t,s;\xi)\right\|^2 = TrQ(t,s;C^*(t)C(t))E(\xi\otimes\xi)$.

Dacă $E(\xi\otimes\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \otimes e_i, c_i \geq 0$ este descompunerea Hilbert-Schmidt a lui $E(\xi\otimes\xi)$ atunci

$TrQ(t,s;C^*(t)C(t))E(\xi\otimes\xi) = TrQ(t,s;C^*(t)C(t))\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \otimes e_i$ şi, conform Corolarului 1.1.9, Teoremei 1.1.2 şi Observaţiei 1.1.3, obţinem

$E\left\|C(t)y(t,s;\xi)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i TrQ(t,s;C^*(t)C(t))\left(e_i\otimes e_i\right).$

Fie τ cel din Definiţia 3.4.1. Aplicăm teorema convergenţei monotone şi avem

$\int_s^{s+\tau} E\left\|C(t)y(t,s;\xi)\right\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_s^{s+\tau} TrQ(t,s;C^*(t)C(t))\left(e_i\otimes e_i\right)dt$

oricare ar fi $s \in \mathbf{R}_+$. Deoarece $\{A,C;G_i\}$ este uniform observabil, obţinem

$\int_s^{s+\tau} TrQ(t,s;C^*(t)C(t))\left(e_i\otimes e_i\right)dt \geq \gamma$ oricare ar fi $i \in \mathbf{N}$, conform Teoremei 3.4.2. Acum este clar că $\int_s^{s+\tau} E\left\|C(t)y(t,s;\xi)\right\|^2 dt \geq \gamma\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ şi cum $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \left\|E(\xi\otimes\xi)\right\|_1 = E\left\|\xi\right\|^2$, rezultă $\int_s^{s+\tau} E\left\|C(t)y(t,s;\xi)\right\|^2 dt \geq \gamma E\left\|\xi\right\|^2$. Din teoremei lui Fubini rezultă concluzia. $\square$

4.2. Stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor de ecuaţii diferenţiale stocastice uniform observabile. Peste tot in acest paragraf presupunem că A satisface $P_1, G_i \in C_b([0,\infty), L(H)), i = 1,...,m$ şi $C \in C_b([0,\infty), L(H,V))$, dacă nu se precizează altfel. Notăm $\widetilde{G}_i = \sup_{r\geq 0}\left\|G_i(r)\right\|, i = 1,...,m$ şi $\widetilde{C} = \sup_{r\geq 0}\left\|C(r)\right\|.$

Rezultatul principal al acestui paragraf este Teorema 3.4.5 care stabileşte o caracterizare a stabilităţii exponenţiale uniforme pentru sisteme uniform observabile folosind ecuaţiile Lyapunov.

Fie sistemul observat $\{A,C;G_i\}$. Considerăm ecuaţia Lyapunov

(3.4.4)
$$\frac{dQ(t)}{dt} + A^*(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(t)Q(t)G_i(t) + C^*(t)C(t) = 0, t \geq 0$$

şi ecuaţia aproximantă Lyapunov

(3.4.5)

$$\frac{dQ_n(t)}{dt} + A_n^*(t)Q_n(t) + Q_n(t)A_n(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(t)Q_n(t)G_i(t) + C^*(t)C(t) = 0.$$

unde $A_n(t), n \in \mathbf{N}$ sunt aproximările Yosida ale lui $A(t)$.

Inainte de a stabili rezultatul principal al acestui paragraf avem nevoie de lema următoare.

Lema 3.4.4. *Fie $T > 0$ şi $0 \leq s \leq r \leq T$. Dacă $Q_n(r, s; C^*(r)C(r))$ este soluţia clasică a ecuaţiei (3.2.11) cu condiţia finală $Q_n(r) = C^*(r)C(r)$ atunci*

a) funcţia $s \to Q_n(r, s; C^*(r)C(r))$ este continuă in topologia normei $\|.\|$ pe $[0, r]$, uniform in raport cu r, oricare ar fi $r \leq T$.

b) funcţia $r \to Q_n(r, s; C^*(r)C(r))$ este continuă in topologia slabă pe $[s, T]$.

c) funcţia $s \to \left\langle \frac{\partial Q_n(r,s;C^*(r)C(r))}{\partial s} x, y \right\rangle$ este continuă pe $[0, r]$, uniform in raport cu r, oricare ar fi $r \leq T$ şi $x, y \in H$.

d) funcţia $r \to \left\langle \frac{\partial Q_n(r,s;C^*(r)C(r))}{\partial s} x, y \right\rangle$ este continuă pe $[s, T]$ oricare ar fi $x, y \in H$.

Demonstraţie. a) Vom nota $Q_n(r, s) = Q_n(r, s; C^*(r)C(r))$. Conform Lemei 3.2.1, rezultă că avem

$$Q_n(r, s)x = U_n^*(r, s)C^*(r)C(r)U_n(r, s)x + \\ + \sum_{i=1}^{m} \int_s^r U_n^*(p, s)G_i^*(p)Q_n(r, p)G_i(p)U_n(p, s)x dp.$$

După cum am văzut in demonstraţia Lemei 1.4.8, există o constantă pozitivă $\widetilde{M}_{T,1}$ astfel incât $\|U_n(r, s)\| \leq \widetilde{M}_{T,1}$ oricare ar fi $0 \leq s \leq r \leq T$ şi $n \in \mathbf{N}$. Atunci avem

$$\|Q_n(r,s)x\| \le \widetilde{M}_{T,1}^2 \|x\| \left[\widetilde{C}^2 + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{G}_i^2 \int_s^r \|Q_n(r,p)\| \, dp\right].$$

Aplicăm lema lui Gronwall şi este uşor de văzut că există constanta pozitivă q_T care depinde de $\widetilde{M}_{T,1}, \widetilde{C}, T$ şi $\widetilde{G}_i, i = 1,..,m$ astfel incât $\|Q_n(r,s)\| \le q_T$ oricare ar fi $0 \le s \le r \le T$ şi $n \in \mathbf{N}$. Fie $0 \le s_0 \le s \le r$. Avem

$$\begin{aligned}Q_n(r,s)x - Q_n(r,s_0)x = {} & U_n^*(r,s)C^*(r)C(r)U_n(r,s)x - \\ & U_n^*(r,s_0)C^*(r)C(r)U_n(r,s_0)x + \\ & \sum_{i=1}^{m} \int_s^r U_n^*(p,s)G_i^*(p)Q_n(r,p)G_i(p)U_n(p,s)x - \\ & U_n^*(p,s_0)G_i^*(p)Q_n(r,p)G_i(p)U_n(p,s_0)xdp + \\ & \sum_{i=1}^{m} \int_{s_0}^{s} U_n^*(p,s_0)G_i^*(p)Q_n(r,p)G_i(p)U_n(p,s_0)xdp.\end{aligned}$$

Trecând la norme şi grupând corespunzător termenii obţinem

$$\begin{aligned}\|Q_n(r,s)x - Q_n(r,s_0)x\| \le {} & \widetilde{C}^2 \|U_n(r,s) - U_n(r,s_0)\|^2 \|x\| + \\ & 2\widetilde{C}^2 \widetilde{M}_{T,1} \|U_n(r,s) - U_n(r,s_0)\| \|x\| + \\ & \sum_{i=1}^{m} \widetilde{G}_i^2 q_T \int_s^r \|U_n(p,s) - U_n(p,s_0)\|^2 \|x\| + \\ & 2\widetilde{M}_{T,1} \|U_n(r,s) - U_n(r,s_0)\| \|x\| \, dp + \\ & \sum_{i=1}^{m} \widetilde{G}_i^2 q_T \widetilde{M}_{T,1}^2 (s - s_0) \|x\| .\end{aligned}$$

Din Propoziţia 1.4.2 rezultă că aplicaţia $(r,s) \to U_n(r,s)$ este continuă in topologia normei, $\|.\|$, pe compactul $\{(r,s), 0 \le s \le r \le T\}$. Deci, funcţia $s \to U_n(r,s)$ este continuă in norma $\|.\|$, uniform in raport cu r, oricare ar fi $r \le T$.

Astfel, pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$, există $\delta_\varepsilon \in (0,\varepsilon)$, independent de r, astfel incât $\|U_n(r,s) - U_n(r,s_0)\| < \varepsilon$ oricare ar fi $0 < s - s_0 < \delta_\varepsilon, (r,s), (r,s_0) \in \{(r,s), 0 \leq s \leq r \leq T\}$. Atunci avem
$\|Q_n(r,s) - Q_n(r,s_0)\| \leq \varepsilon \left[\left(1 + 2\widetilde{M}_{T,1}\right) \left(\widetilde{C}^2 + T \sum\limits_{i=1}^{m} \widetilde{G}_i^2 q_T\right) + \sum\limits_{i=1}^{m} \widetilde{G}_i^2 q_T \widetilde{M}_{T,1}^2 \right]$
oricare ar fi $0 < s - s_0 < \delta_\varepsilon$ şi este clar că $\lim\limits_{s \searrow s_0} \|Q_n(r,s) - Q_n(r,s_0)\| = 0$ uniform in raport cu r oricare ar fi $r \leq T$.

Exact in acelaşi mod se arată că şi limita $\lim\limits_{s \nearrow s_0} \|Q_n(r,s) - Q_n(r,s_0)\|$ este egală cu 0, uniform in raport cu r, oricare ar fi $r \leq T$ şi rezultă concluzia.

b) Din relaţia (3.4.2) şi Teorema 3.2.8 rezultă că $r \to \langle Q_n(r,s)x, x\rangle$ este continuă pe $[s,t]$ oricare ar fi $x \in H$ şi, cum $Q_n(r,s)$ este un operator autoadjunct, rezultă concluzia.

c) Deoarece $Q_n(r,s)$ este soluţia clasică a ecuaţiei (3.2.11), avem

$$\frac{\partial Q_n(r,s)}{\partial s} x = -A_n^*(s) Q_n(r,s)x - Q_n(r,s)A_n(s)x - \sum_{i=1}^{m} G_i^*(s) Q_n(r,s) G_i(s)x. \tag{3.4.6}$$

Aplicaţia $s \to -(A_n^*(s)Q_n(r,s) + Q_n(r,s)A_n(s))$ este continuă in topologia normei $\|.\|$, uniform in raport cu r, conform punctului a) şi Lemei 1.4.3. Pentru a completa demonstraţia acestui punct este suficient să arătăm că şi funcţiile $s \to -\langle G_i^*(s)Q_n(r,s)G_i(s)x, x\rangle, i = 1,..,m$ sunt continue, uniform in raport cu r. Fie $0 \leq s_0 \leq r \leq T$. Avem

$$|\langle G_i^*(s)Q_n(r,s)G_i(s)x, x\rangle - \langle G_i^*(s_0)Q_n(r,s_0)G_i(s_0)x, x\rangle| \leq$$

$$\leq |\langle Q_n(r,s)\,[G_i(s)-G_i(s_0)]\,x, [G_i(s)-G_i(s_0)]\,x\rangle| +$$
$$2\,|\langle Q_n(r,s)G_i(s_0)x, [G_i(s)-G_i(s_0)]\,x\rangle| +$$
$$\|Q_n(r,s)-Q_n(r,s_0)\|\,\|G_i(s_0)x\|^2$$
$$\leq q_T\,\|[G_i(s)-G_i(s_0)]\,x\|^2 + 2q_T\widetilde{G}_i\,\|[G_i(s)-G_i(s_0)]\,x\| +$$
$$\widetilde{G}_i^2\,\|Q_n(r,s)-Q_n(r,s_0)\|\,\|x\|^2\,.$$

Conform punctului a) şi ipotezei rezultă că funcţiile

$s \to -\langle G_i^*(s)Q_n(r,s)G_i(s)x,x\rangle\,, i = 1,..,m$ sunt continue, uniform in raport cu r. Deoarece operatorul $G_i^*(s)Q_n(r,s)G_i(s)$este autoadjunct, pentru orice $i \in \{1,...,m\}$, se deduce că aplicaţia $s \to -G_i^*(s)Q_n(r,s)G_i(s)$ este continuă in topologia slabă pe $[0,r]$, uniform in raport cu $r, r \in [s,T]$. Am obţinut concluzia.

d) Folosind (3.4.6) şi punctul b), obţinem ceea ce trebuie demonstrat. □

Convenim să notăm ecuaţia (1.4.1) cu $\{A;G_i\}$. Avem teorema:

Teorema 3.4.5. [**67**]*Presupunem că este satisfăcută ipoteza* P_2 *şi* $C^*C \in C_b([0,\infty), L(V,H))$. *Dacă* $\{A,C;G_i\}$ *este uniform observabil atunci ecuaţia* $\{A;G_i\}$ *este uniform exponenţial stabilă dacă şi numai dacă ecuaţia (3.4.4) admite o unică soluţie de evoluţie* $\mathcal{Q}$ *care are proprietatea că există constantele pozitive* $\widetilde{m}$, $\widetilde{M}$ *astfel incât*

$$\widetilde{m}\,\|x\|^2 \leq \langle \mathcal{Q}(t)x,x\rangle \leq \widetilde{M}\,\|x\|^2 \tag{3.4.7}$$

pentru toţi $t \in \mathbf{R}_+$ *şi* $x \in H$.

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Fie $\mathcal{Q}$ operatorul liniar şi nenegativ care satisface egalitatea

$$\langle \mathcal{Q}(s)x, x\rangle = E\int_s^\infty \|C(r)y(r,s;x)\|^2\,dr$$

Deoarece $\sup\limits_{r\in[0,\infty)} \|C(r)\| = \widetilde{C} < \infty$ avem

$$0 \le \langle \mathcal{Q}(s)x, x\rangle \le \widetilde{C}^2 \int_s^\infty E\,\|y(r,s;x)\|^2\,dr \le$$

$$\le \widetilde{C}^2 \int_s^\infty Me^{-\omega(r-s)}\,\|x\|^2\,dr < \widetilde{C}^2 \frac{M}{\omega}\,\|x\|^2\,.$$

Acum este clar că $\mathcal{Q}(s)$ este un operator bine definit. Conform observabilităţii uniforme a sistemului $\{A, C; G_i\}$ deducem că există $\tau, \gamma > 0$ astfel incât

$\langle \mathcal{Q}(s)x, x\rangle \ge E\int\limits_s^{s+\tau} \|C(r)y(r,s;x)\|^2\,dr \ge \gamma\,\|x\|^2$ pentru orice $s \in \mathbf{R}_+$ şi $x \in H$. Luăm $\widetilde{m} = \gamma$ şi $\widetilde{M} = \widetilde{C}^2\frac{M}{\omega}$ şi vedem că $\mathcal{Q}$ satisface (3.4.7).

Fie $T > 0$. Dacă definim operatorul nenegativ $\mathcal{Q}_T^n(s)$ prin relaţia

$\langle \mathcal{Q}_T^n(s)x, x\rangle = E\int\limits_s^T \|C(r)y_n(r,s;x)\|^2\,dr$ atunci deducem, conform Teoremei 3.2.8, că $\langle \mathcal{Q}_T^n(s)x, x\rangle = \int\limits_s^T \langle Q_n(r,s;C^*(r)C(r))x, x\rangle\,dr$ unde Q_n este soluţia ecuaţiei aproximante Lyapunov (3.2.11). Deoarece avem indeplinite condiţiile de aplicare ale Lemei 3.4.4, rezultă, folosind definiţia derivabilităţii, că aplicaţia $s \to \langle \mathcal{Q}_T^n(s)x, x\rangle$ este derivabilă şi

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle \mathcal{Q}_T^n(s)x, x\rangle = -\langle L_n^*(s)\mathcal{Q}_T^n(s)x, x\rangle - \langle C^*(s)C(s)x, x\rangle\,,$$

unde $L_n^*(s)$ este definit de (3.2.4). Inlocuind s cu σ in ultima relaţie şi integrând de la s la T in raport cu σ avem

$$\langle \mathcal{Q}_T^n(s)x, x\rangle = \int_s^T \langle L_n^*(\sigma)\mathcal{Q}_T^n(\sigma)x, x\rangle + \langle C^*(\sigma)C(\sigma)x, x\rangle \, d\sigma$$

Observăm că unica soluţie clasică a ecuaţiei (3.4.5) cu condiţia finală $\mathcal{Q}_T^n(T) = 0$, notată $\widehat{\mathcal{Q}}_T^n$, satisface ecuaţia integrală de mai sus. Atunci avem

(3.4.8)
$$\left\langle \left[\mathcal{Q}_T^n(s) - \widehat{\mathcal{Q}}_T^n(s)\right] x, x\right\rangle = \int_s^T \left\langle L_n^*(\sigma)\left[\mathcal{Q}_T^n(\sigma) - \widehat{\mathcal{Q}}_T^n(\sigma)\right] x, x\right\rangle d\sigma$$

Deoarece atât $\mathcal{Q}_T^n(s)$ cât şi $\widehat{\mathcal{Q}}_T^n(s)$ sunt operatori autoadjuncţi oricare ar fi $s \in [0, T]$, deducem cu ajutorul Lemei lui Gronwall că

$$\mathcal{Q}_T^n(s) = \widehat{\mathcal{Q}}_T^n(s) \tag{3.4.9}$$

oricare ar fi $s \in [0, T]$. Conform punctului b) al Lemei 3.4.4 şi faptului că $\|Q_n(r, s; C^*(r)C(r))\| \le q_T$ oricare ar fi $0 \le s \le r \le T$ şi $n \in \mathbf{N}$ (a se vedea demonstraţia punctului a) al aceleiaşi leme), deducem că $r \to Q_n(r, s; C^*(r)C(r))x$ este Bochner integrabilă şi $\int_s^T Q_n(r, s; C^*(r)C(r))xdr < \infty$. Atunci este clar că $\mathcal{Q}_T^n(s)x = \int_s^T Q_n(r, s; C^*(r)C(r))xdr$. Trecând la limită pentru $n \to \infty$ in ultima relaţie şi aplicând Lema 3.2.1 deducem că $\mathcal{Q}_T^n(s)x \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{Q}_T(s)x$ oricare ar fi $x \in H$ şi $\mathcal{Q}_T(s)x = \int_s^T Q(r, s; C^*(r)C(r))xdr$ este unica soluţie a ecuaţiei (3.4.4) cu condiţia finală $\mathcal{Q}_T(T) = 0$.

Fie T_n un şir monoton crescător astfel incât $T_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Deoarece $\{\mathcal{Q}_{T_n}(s)\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir de operatori nenegativi, crescător şi mărginit superior pentru fiecare s fixat atunci el este tare convergent la operatorul $\mathcal{Q}(s)$. Astfel, funcţia $s \to \langle \mathcal{Q}(s)x, x\rangle$ este măsurabilă Borel ca limită a unui şir de funcţii continue. Pentru $T_n \geq t \geq s$ avem

$$\mathcal{Q}_{T_n}(s)x = U^*(t,s)\mathcal{Q}_{T_n}(t)U(t,s)x +$$
$$+ \int_s^t U^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)\mathcal{Q}_{T_n}(r)G_i(r) + C^*(r)C(r)]U(r,s)xdr.$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ şi aplicând teorema convergenţei dominate deducem că $\mathcal{Q}(s)$ satisface ecuaţia integrală

$$\mathcal{Q}(s)x = U^*(t,s)\mathcal{Q}(t)U(t,s)x +$$
$$+ \int_s^t U^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)\mathcal{Q}(r)G_i(r) + C^*(r)C(r)]U(r,s)xdr.$$

Dacă $\overline{\mathcal{Q}}$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (3.4.4) cu condiţia finală $\overline{\mathcal{Q}}(t) = \mathcal{Q}(t) \geq 0$ atunci avem

$$\overline{\mathcal{Q}}(s)x = U^*(t,s)\mathcal{Q}(t)U(t,s)x +$$
$$+ \int_s^t U^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)\overline{\mathcal{Q}}(r)G_i(r) + C^*(r)C(r)]U(r,s)xdr.$$

Scăzând cele două relaţii şi apoi aplicând lema lui Gronwall rezultă că $\mathcal{Q}(s)x = \overline{\mathcal{Q}}(s)x$ oricare ar fi $0 \leq s \leq t$. (Ca şi in cazul teoremei de reprezentare, lema lui Gronwall poate fi aplicată deoarece funcţia $r \to \left\|\mathcal{Q}(r) - \overline{\mathcal{Q}}(r)\right\|, r \in [s,t]$ este măsurabilă Borel şi mărginită superior.) Cum "t" a fost ales arbitrar rezultă că $\mathcal{Q}$ este soluţie de evoluţie a ecuaţiei (3.4.4).

Pentru a demonstra **unicitatea**, presupunem că $\mathcal{Q}^1$ este o altă soluţie a ecuaţiei (3.4.4). Atunci se aplică formula lui Ito pentru funcţia $F(t,x) = \langle[\mathcal{Q}_n(t) - \mathcal{Q}_n^1(t)]x, x\rangle$ şi procesul stocastic $y_n(t,s;x)$,unde

$\mathcal{Q}_n(t)$ şi $\mathcal{Q}_n^1(t)$ sunt soluţiile ecuaţiei (3.4.5) cu condiţiile iniţiale $\mathcal{Q}_n(T) = \mathcal{Q}(T)$ şi respectiv $\mathcal{Q}_n^1(T) = \mathcal{Q}^1(T)$. Făcând calculele uzuale obţinem $\langle[\mathcal{Q}_n(s) - \mathcal{Q}_n^1(s)]x, x\rangle = E\langle[\mathcal{Q}(T) - \mathcal{Q}^1(T)]y_n(T, s; x), y_n(T, s; x)\rangle$ oricare ar fi $T \geq s$ şi $x \in H$. Trecem la limită pentru $n \to \infty$ şi avem $\langle[\mathcal{Q}(s) - \mathcal{Q}^1(s)]x, x\rangle = E\langle[\mathcal{Q}(T) - \mathcal{Q}^1(T)]y(T, s; x), y(T, s; x)\rangle$.

Ţinând cont de faptul că ecuaţia $\{A; G_i\}$ este uniform exponenţial stabilă şi că $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^1$ sunt mărginite pe $\mathbf{R}_+$, trecem la limită pentru $T \to \infty$ in ultima inegalitate şi deducem că $\mathcal{Q}(s) - \mathcal{Q}^1(s) = 0$ oricare ar fi $s \in \mathbf{R}_+$. Demonstraţia acestei implicaţii este completă .

"$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{Q}$ soluţia de evoluţie unică a ecuaţiei (3.4.4) care are proprietatea (3.4.7). Fie τ şi γ constantele din Definiţia 3.4.1.

Fie $T > 0$şi $\mathcal{Q}_n(t) = Q_n(T, t; \mathcal{Q}(T))$ soluţia ecuaţiei (3.4.5) cu condiţia finală $\mathcal{Q}_n(T) = \mathcal{Q}(T)$. Aplicăm formula lui Ito pentru funcţia $F_n : \mathbf{R}_+ \times H \to \mathbf{R}, F_n(t, x) = \langle\mathcal{Q}_n(t)x, x\rangle$ şi procesul stocastic $y_n(t, s; x)$, $x \in H$ şi avem

$$\langle\mathcal{Q}_n(t)y_n(t, s; x), y_n(t, s; x)\rangle = \langle\mathcal{Q}_n(s)x, x\rangle +$$

$$+ \int_s^t \left\langle \frac{d\mathcal{Q}_n(r)}{dr} y_n(r, s; x), y_n(r, s; x)\right\rangle + \langle\mathcal{Q}_n(r)A_n(r)y_n(r, s; x), y_n(r, s; x)\rangle +$$

$$\langle A_n^*(r)\mathcal{Q}_n(r)y_n(r, s; x), y_n(r, s; x)\rangle +$$

$$\sum_{i=1}^m \langle G_i^*(r)\mathcal{Q}_n(r)G_i(r)y_n(r, s; x), y_n(r, s; x)\rangle \, dr +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int_s^t \langle\mathcal{Q}_n(r)y_n(r, s; x), G_i(r)y_n(r, s; x)\rangle \, dw_i(r) +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int_s^t \langle G_i(r)y_n(r, s; x), \mathcal{Q}_n(r)y_n(r, s; x)\rangle \, dw_i(r).$$

oricare ar fi $T \geq t \geq s$.

Astfel , folosind (3.4.5) şi trecând la medie, avem

$$E\left\langle \mathcal{Q}_n(t)y_n(t,s;x),y_n(t,s;x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{Q}_n(s)x,x\right\rangle -$$
$$- E\int_s^t \left\langle C^*(r)C(r)y_n(r,s;x),y_n(r,s;x)\right\rangle dr$$

pentru orice $x \in H, T \geq t \geq s \geq 0$.

Trecem la limită, pentru $n \to \infty$, in ultima egalitate (conform Lemei 3.2.1 şi Lemei 1.4.6) şi avem :

$$\left\langle \mathcal{Q}(s)x,x\right\rangle = E\left\langle \mathcal{Q}(t)y(t,s;x),y(t,s;x)\right\rangle + E\int_s^t \|C(r)y(r,s;x)\|^2 dr$$

pentru orice $x \in H$ şi $T \geq t \geq s \geq 0$. Cum T a fost ales arbitrar, rezultă că relaţia de mai sus este valabilă pentru orice $t \geq s \geq 0$.

Astfel, dacă $t = s+\tau$, $s \geq 0$ atunci avem

$\left\langle \mathcal{Q}(s)x,x\right\rangle = E\left\langle \mathcal{Q}(s+\tau)y(s+\tau,s;x),y(s+\tau,s;x)\right\rangle > +$
$E\int\limits_s^{s+\tau} \|C(r)y(r,s;x)\|^2 dr.$

Din Teorema 3.2.8 şi observabilitatea uniformă a sistemului $\{A,C;G_i\}$ deducem $\left\langle \mathcal{Q}(s)x,x\right\rangle \geq \left\langle Q(s+\tau,s;\mathcal{Q}(s+\tau))x,x\right\rangle + \gamma\|x\|^2$, $x \in H$.

Aplicăm (3.4.7) şi avem $(1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})\left\langle \mathcal{Q}(s)x,x\right\rangle \geq \left\langle Q(s+\tau,s;\mathcal{Q}(s+\tau))x,x\right\rangle$ oricare ar fi $x \in H$. Dacă inlocuim x cu $y(s,p;x), s \geq p \geq 0, x \in H$ obţinem prin trecere la medie

$(1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})E\left\langle \mathcal{Q}(s)y(s,p;x),y(s,p;x)\right\rangle \geq E\left\langle Q(s+\tau,s;\mathcal{Q}(s+\tau))y(s,p;x),y(s,p;x)\right\rangle.$

Folosim din nou Teorema 3.2.8 şi avem $(1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})\left\langle Q(s,p;\mathcal{Q}(s))x,x\right\rangle \geq$

$$\left\langle Q(s,p;Q(s+\tau,s;\mathcal{Q}(s+\tau)))x,x\right\rangle.$$

Din unicitatea soluţiei de evoluţie a ecuaţiei (3.2.10) deducem că $(1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})\left\langle Q(s,p;\mathcal{Q}(s))x,x\right\rangle \geq \left\langle Q(s+\tau,p;\mathcal{Q}(s+\tau))x,x\right\rangle$ pentru toţi $s+\tau \geq p \geq 0$. Fie $t \in \mathbf{R}_+$. Atunci există $n \in \mathbf{N}$ astfel incât $t-p=$

$n\tau + r, 0 \le r < \tau$. Pentru $r \in [0,\tau]$ fixat şi $t \ge r$, $t - p = n\tau + r$, se poate demonstra prin inducţie după n că avem

$\langle Q(t,p;\mathcal{Q}(t))x,x)\rangle \le (1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})^n \langle Q(r+p,p;\mathcal{Q}(r+p))x,x\rangle$. Ţinând cont de monotonia lui $Q(t,p;R)$ in condiţiile iniţiale şi de (3.4.7) avem

$\widetilde{m}\langle Q(t,p;I)x,x\rangle \le (1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})^n \widetilde{M}\langle Q(r+p,p;I)x,x\rangle$ sau echivalent

$\widetilde{m}E\|y(t,p;x)\|^2 \le (1-\gamma/\widetilde{M})^n \widetilde{M}E\|y(r+p,p;x)\|^2$. Relaţia (1.4.2) ne conduce la inegalitatea

$$E\|y(r+p,p;x)\|^2 \le (m+1)[\|U(r+p,p)\|^2\|x\|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_p^{r+p}\|U(r+p,s)\|^2\widetilde{G}_i^2 E\|y(s,p;x)\|^2 ds].$$

Ţinând cont de faptul că operatorul de evoluţie $U(t,s)$ este cu creştere exponenţială şi $0 \le r < \tau$, obţinem

$E\|y(r+p,p;x)\|^2 \le (m+1)M_0^2 e^{2\omega\tau}[\|x\|^2 + \sum_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i^2\int_p^{r+p}E\|y(s,p;x)\|^2 ds]$.

Folosind inegalitatea lui Gronwall ([**38**]) este clar că dacă $K(r) = (m+1)M_0^2 e^{2\omega\tau}\exp[(m+1)\sum_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i^2 M_0^2 e^{2\omega\tau} r]$ atunci $E\|y(r+p,p;x)\|^2 \le K(r)\|x\|^2$. Deoarece aplicaţia $r \to K(r)$ este monoton crescătoare şi $0 \le r < \tau$, obţinem $E\|y(r+p,p;x)\|^2 \le K\|x\|^2$, unde $K = K(\tau)$. Atunci avem

$E\|y(t,p;x)\|^2 \le [(1-\gamma/\widetilde{M})^{1/\tau}]^{t-p}K(\widetilde{M}/\widetilde{m})(1-\gamma/\widetilde{M})^{-r/\tau}]\|x\|^2$ pentru toţi $x \in H$.

De aici rezultă concluzia. □

5. Comportări asimptotice ale ecuaţiilor diferenţiale stocastice cu coeficienţi liniari şi mărginiţi

Peste tot in acest paragraf ipoteza P_1 este inlocuită cu condiţia $A \in C([0,\infty), L(H))$ şi se presupune că $G_i \in C([0,\infty), L(H))$, $i = 1, ..., m$, dacă nu se fac alte precizări. Astfel, pentru a obţine rezultate similare celor din paragrafele 2 şi 4 ale acestui capitol nu am mai recurs la sisteme aproximante şi demonstraţiile au fost simplificate.

5.1. Ecuaţii diferenţiale in $\mathcal{H}_2$. Pentru fiecare $t \geq 0$ considerăm funcţia $L(t) : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$,

$L(t)(P) = A(t)P + PA^*(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)PG_i^*(t), P \in \mathcal{H}_2$.

Conform consideraţiilor din subparagraful 2.1.2 al acestui capitol, $L(t) \in L(\mathcal{H}_2)$ iar adjunctul acestui operator, notat $L^*(t)$ este un operator liniar şi mărginit definit pe $\mathcal{H}_2$ cu valori in $\mathcal{H}_2$ dat de formula

$$L^*(t)(R) = RA^*(t) + A(t)R + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)RG_i^*(t)$$

oricare ar fi $t \geq 0$ şi $R \in \mathcal{H}_2$.

Propoziţia 3.5.1. *Dacă* $A, G_i \in C([0,\infty), L(H))$, $i = 1, ..., m$ *atunci* $L, L^* \in C([0,\infty), L(\mathcal{H}_2))$.

Demonstraţie. Vom arăta că $L \in C([0,\infty), L(\mathcal{H}_2))$ deoarece afirmaţia pentru L^* poate fi demonstrată in mod asemănător. Pentru toţi $P \in \mathcal{H}_2$ şi $t, s \geq 0$ avem $\|L(t)(P) - L(s)(P)\|_2 =$

$$\left\| [A(t) - A(s)]P + P[A^*(t) - A^*(s)] + \sum_{i=1}^{m} [G_i(t)PG_i^*(t) - G_i(s)PG_i^*(s)] \right\|_2 \leq$$

$$\leq 2\|A(t) - A(s)\| \|P\|_2 + \sum_{i=1}^{m} (\|G_i(t) - G_i(s)\|^2 \|P\|_2 +$$
$$+2\|G_i(t) - G_i(s)\| \|P\|_2 \|G_i(s)\| .$$

Trecem la limită pentru $t \to s$ şi folosind ipoteza rezultă concluzia. □

Observaţia 3.5.2. *Dacă considerăm* $L(t), L^*(t) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $L(t)(P) = A(t)P + PA^*(t) + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)PG_i^*(t)$, $L^*(t)(R) = RA^*(t) + A(t)R + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)RG_i^*(t)$, $P \in \mathcal{E}$ *atunci nu este dificil de văzut că* $L(t), L^*(t)$ *sunt operatori liniari*

şi mărginiţi pe $\mathcal{E}$ *şi* $L, L^* \in C([0,\infty), L(\mathcal{E}))$.

Considerăm ecuaţia

$$\frac{dP(t)}{dt} = L(t)P(t) \tag{3.5.1}$$

in $\mathcal{H}_2$. Conform Propoziţiei 3.5.1 rezultă că avem indeplinite ipotezele Propoziţiei 1.4.2. Deci, ecuaţia (3.5.1) cu valoarea iniţială $P(s) = R \in \mathcal{H}_2$ are o soluţie unică dată de formula $P(t) = \mathcal{U}(t,s)(R)$ oricare ar fi $t \geq \ s \geq 0$, unde $\mathcal{U}(t,s)$ este operatorul de evoluţie pe $\mathcal{H}_2$ generat de familia $L(t)$.

De aici (punctul d) al Propoziţiei 1.4.2) rezultă că

$$\frac{\partial \mathcal{U}^*(t,s)}{\partial s} = -L^*(s)\mathcal{U}^*(t,s) \tag{3.5.2}$$

oricare ar fi $t \geq s \geq 0$.

În continuare vom considera ecuaţia Lyapunov

$$\frac{dQ(s)}{ds} + A^*(s)Q(s) + Q(s)A(s) + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(s)Q(s)G_i(s) = 0 \tag{3.5.3}$$

in $\mathcal{E} \subset L(H)$.

Din Observaţia 3.5.2, Propoziţia 1.4.2 şi conform [**11**] rezultă lema de mai jos:

Lema 3.5.3. *Presupunem că $A, G_i \in\ C([0,\infty), L(H))$, $i = 1, ..., m$, $0 < T < \infty$ şi $R \in L(H)$. Atunci există o soluţie clasică unică Q a lui (3.5.3) pe $[0,T]$ astfel incât $Q(T) = R$, notată cu $Q(T,s;R)$. Mai mult, $Q(T,s;R)$ este monotonă in sensul că $Q(T,s;R_1) \leq Q(T,s;R_2)$ dacă $0 \leq R_1 \leq R_2$.*

Fie $R \in \mathcal{H}_2$ şi $t \geq 0$ fixat. Deoarece $\mathcal{U}^*(t,t)(R) = R$, deducem din (3.5.2) şi lema de mai sus că soluţia unică a lui (3.5.3) cu valoarea finală $Q(t) = R$ este

$$Q(t,s;R) = \mathcal{U}^*(t,s)(R). \tag{3.5.4}$$

5.2. Soluţii de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale liniare stocastice şi reprezentări ale lor in raport cu soluţiile ecuaţiilor Lyapunov. Cu ipotezele făcute la inceputul acestui paragraf, Propoziţia 3.2.6 se poate formula astfel.

Propoziţia 3.5.4. *Dacă $y(t,s;\xi)$, $\xi \in L_s^2(H)$ este soluţia clasică a lui (1.4.1) atunci $E[y(t,s;\xi) \otimes y(t,s;\xi)]$ este soluţia unică a ecuaţiei (3.5.1) cu condiţia iniţială*

$$P(s) = E(\xi \otimes \xi), \xi \in L_s^2(H). \tag{3.5.5}$$

Demonstraţie. Faptul că $E[y(t,s;\xi) \otimes y(t,s;\xi)]$ este soluţie a ecuaţiei (3.5.1) cu condiţia iniţială $P(s) = E(\xi \otimes \xi), \xi \in L_s^2(H)$ rezultă folosind acelaşi tip de demonstraţie ca in cazul Propoziţiei 3.2.6 cu observaţia că nu se mai folosesc aproximări ale ecuaţiilor, ci direct ecuaţiile.

Unicitatea este o consecinţă a Propoziţiei 1.4.2 şi a Lemei 3.5.1. □

Teorema următoare demonstrează faptul că, in ipoteza că A,

$G_i \in C([0,\infty), L(H)), i = 1, ..., m$, concluziile Teoremei 3.2.8 rămân adevărate.

Teorema 3.5.5. *Fie $B \in L(H,V)$. Dacă $y(t,s;\xi), \xi \in L_s^2(H)$ este soluţia clasică a lui (1.4.1) şi $Q(t,s,R)$ este soluţia clasică unică a lui (3.5.3) cu valoarea finală $Q(t) = R$ atunci*

a)

$$\langle E[y(t,s;\xi) \otimes y(t,s;\xi)]u, u\rangle = TrQ(t,s; u \otimes u)E(\xi \otimes \xi) \tag{3.5.6}$$

oricare ar fi $u \in H, \xi \in L_s^2(H)$.

b)

$$E\,\|B\ y(t,s;\xi)\|^2 = TrQ(t,s;B^*B)E(\xi\otimes\xi) \tag{3.5.7}$$

pentru toţi $u,\xi\in L_s^2(H)$.

Demonstraţie. a) Fie $y(t,s;\xi)$, $\xi\in L_s^2(H)$ soluţia clasică a lui (1.4.1). Aplicând Propoziţia 3.5.4 şi consideraţiile din subparagraful precedent, referitore la soluţia (clasică) a ecuaţiei (3.5.1) in $\mathcal{H}_2$, avem succesiv $\langle E[y(t,s;\xi)\otimes y(t,s;\xi)]u,u\rangle = \langle\mathcal{U}(t,s)E(\xi\otimes\xi)u,u\rangle = Tr\mathcal{U}(t,s)E(\xi\otimes\xi)(u\otimes u) = \langle u\otimes u,\mathcal{U}(t,s)E(\xi\otimes\xi)\rangle_2 = Tr[\mathcal{U}^*(t,s)(u\otimes u)]E(\xi\otimes\xi)$. Din (3.5.4) rezultă că $\mathcal{U}^*(t,s)(u\otimes u)=Q(t,s;u\otimes u)$ unde Q este soluţia clasică a lui (3.5.3) şi obţinem concluzia.

b) Conform Lemei 1.3.5 avem

$$E\,\|B\ y(t,s;\xi)\|^2 = \|BE[\ y(t,s;\xi)\otimes y(t,s;\xi)]B^*\|_1\,. \tag{3.5.8}$$

Dacă $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}^*}$ este o bază ortonormată a lui V atunci aplicăm a) şi avem $\|BE[\ y(t,s;\xi)\otimes y(t,s;\xi)]B^*\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\langle E[y(t,s;\xi)\otimes y(t,s;\xi)]B^*e_i,B^*e_i\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} TrQ(t,s;B^*e_i\otimes B^*e_i)E(\xi\otimes\xi)$. Din (3.5.4), Lema 1.4.2 şi faptul că $B^*e_i\otimes B^*e_i\in\mathcal{H}_2$, $B^*e_i\otimes B^*e_i\geq 0$ oricare ar fi $i\in\mathbf{N}^*$, deducem că

$$\|BE[\ y(t,s;x)\otimes y(t,s;x)]B^*\|_1 = \lim_{p\to\infty} TrQ(t,s;\sum_{i=1}^{p}B^*e_i\otimes e_iB)E(\xi\otimes\xi). \tag{3.5.9}$$

Şirul de operatori nenegativi $B_p=\sum\limits_{i=1}^{p}B^*e_i\otimes e_iB$, $p\geq 1$ este monoton crescător şi mărginit superior ($B_p\leq B^*B$). Deci B_p este convergent in topologia tare la operatorul nenegativ $\widetilde{B}=B^*B\in L^+(H)$.

Conform Lemei 3.5.3, deducem că şirul $\{Q(t,s;B_p)\}_{p\in\mathbf{N}^*}$ este monoton crescător şi $Q(t,s;B_p)\leq Q(t,s;B^*B)$ oricare ar fi $p\in\ \mathbf{N}^*$.

Atunci $\{Q(t,s;B_p)\}_{p\in\mathbf{N}^*}$ converge in topologia tare la operatorul nenegativ $Q(t,s)\in L^+(H)$. Utilizând acelaşi raţionament ca cel folosit in demonstraţia Teoremei 3.2.8 se poate arăta că avem

$$Q(t,s;B^*B)=Q(t,s).$$

Acum din (3.5.8), (3.5.9), Observaţia 1.1.3 şi ultima egalitate obţinem $E\|By(t,s;\xi)\|^2 = TrQ(t,s;B^*B)E(\xi\otimes\xi)$. Demonstraţia este completă. $\square$

5.3. Stabilitatea exponenţială uniformă in cazul finit dimensional. Presupunem că $dim(H)<\infty$. Atunci $\mathcal{H}_2$ coincide cu $\mathcal{E}$ ca spaţiu liniar şi au topologiile echivalente.

Mai mult, soluţia de evoluţie a ecuaţiei (3.2.10) coincide cu soluţia clasică şi aplicând (3.5.4) avem $Q(t,s;R)=\mathcal{U}^*(t,s)R$ pentru orice $R\in\mathcal{E}$, $R\geq 0$, unde $\mathcal{U}(t,s)$ este operatorul de evoluţie relativ la familia de operatori liniari şi mărginiţi

$L(t):\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, $L(t)(P)=A(t)P+PA^*(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}G_i(t)PG_i^*(t)$, $P\in\mathcal{E}$, $L\in C([0,\infty),L(\mathcal{E}))$

Următorul rezultat a fost demonstrat in [**47**] dar il vom prezenta in continuare ca pe o consecinţă a Teoremei 3.3.2 .

Teorema 3.5.6. *Sistemul (1.4.1) este uniform exponenţial stabil dacă există constantele* $M\geq 1$, $\omega>0$ *astfel incât* $\|\mathcal{U}^*(t,s)\|\leq Me^{-\omega(t-s)}$ *oricare ar fi* $t\geq s\geq 0$.

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că $\mathcal{U}^*(t,s)$ satisface ipotezele Lemei 2.2.2. Este clar că $\mathcal{U}^*(t,s)\in L(\mathcal{E})$. Deoarece $\mathcal{U}^*(t,s)(R)=$

$Q(t,s;R)$ oricare ar fi $R \geq 0$ şi $Q(t,s;R) \geq 0$ pentru orice $R \geq 0$ deducem că $\mathcal{U}^*(t,s)(R) \geq 0$ oricare ar fi $R \geq 0$. Aplicând Teorema 3.3.2 şi Lema 2.2.2 rezultă concluzia. $\square$

5.4. Observabilitatea uniformă şi funcţiile Lyapunov. Considerăm ecuaţia (1.4.1) şi relaţia de observare (3.4.1) unde $G_i \in C([0,\infty), L(H)), G_i$ mărginit pe $\mathbf{R}_+$ oricare ar fi $i = 1, ..., m$ şi $C \in C_b([0,\infty), L(H,V))$, $C^*C \in C_s([0,\infty), L(H))$.

În acest paragraf este demonstată Teorema 3.4.5 (Teorema 3.5.7) in ipotezele particulare introduse mai sus.

Presupunem că operatorul de evoluţie $U(t,s)$ generat de familia $A(t)$ este cu creştere exponenţială (are proprietatea P_2). Facem observaţia că dacă $A \in C([0,\infty), L(H))$ este mărginit pe $\mathbf{R}_+$ atunci (conform T.5.5.2 din [**55**]) operatorul de evoluţie $U(t,s)$ este cu creştere exponenţială. Avem teorema:

Teorema 3.5.7. *Dacă $\{A, C; G_i\}$ este uniform observabil atunci ecuaţia $\{A; G_i\}$ este uniform exponenţial stabilă dacă şi numai dacă ecuaţia (3.4.4) admite o unică soluţie clasică R cu proprietatea că există constantele pozitive $\widetilde{m}$, $\widetilde{M}$ astfel incât*

$$\widetilde{m}\,\|x\|^2 \leq \langle R(t)x, x\rangle \leq \widetilde{M}\,\|x\|^2 \tag{3.5.10}$$

oricare ar fi $t \in \mathbf{R}_+$ şi $x \in H$.

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Fie R operatorul liniar şi nenegativ care satisface egalitatea

$$\langle R(s)x, x\rangle = E\int_s^\infty \|C(r)y(r,s;x)\|^2\,dr$$

Fie $\widetilde{C} = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}_+} \|C(t)\|$. Avem

$$0 \leq \langle R(s)x, x\rangle \leq \widetilde{C}^2 \int_s^\infty E\,\|y(r,s;x)\|^2\,dr \leq$$

$$\leq \widetilde{C}^2 \int_s^\infty Me^{-\omega(r-s)}\,\|x\|^2\,dr < \widetilde{C}^2 \frac{M}{\omega}\,\|x\|^2 .$$

Este clar că $R(s)$ este un operator bine definit. Conform observabilităţii uniforme a sistemului $\{A, C; G_i\}$ deducem că există $\tau, \gamma > 0$ astfel incât

$\langle R(t)x, x\rangle \geq \int\limits_t^{t+\tau} \langle C^*(r)C(r)y(r,t;x), y(r,t;x)\rangle\,dr \geq \gamma\,\|x\|^2$ pentru orice $t \in \mathbf{R}_+$ şi $x \in H$. Luăm $\widetilde{m} = \gamma$ şi $\widetilde{M} = \widetilde{C}^2 \frac{M}{\omega}$ şi vedem că R satisface (3.5.10).

Din Teorema 3.5.5 deducem că

$$\langle R(s)x, x\rangle = \int_s^\infty \langle Q(r,s;C^*(r)C(r))x, x\rangle\,dr$$

unde $Q(r,s;C^*(r)C(r))$ este soluţia ecuaţiei (3.5.3) cu condiţia finală $Q(r) = C^*(r)C(r)$. Deoarece $R(s)$ şi $Q(r,s;C^*(r)C(r))$ sunt nenegativi pentru toţi $r \geq s \geq 0$ obţinem

$\langle R(s)x, y\rangle = \int\limits_s^\infty \langle Q(r,s;C^*(r)C(r))x, y\rangle\,dr$ pentru toţi $x, y \in H$.

Fie $T \in \mathbf{R}_+$. Considerăm operatorul nenegativ R_T definit de formula

$$R_T(s)x = \int_s^T Q(r,s;C^*(r)C(r))x dr \text{ oricare ar fi } x \in H, s \leq T.$$

Deoarece, in ipotezele de mai sus, afirmaţiile Lemei 3.4.4 rămân adevărate, dacă inlocuim $Q_n(r,s;C^*(r)C(r))$ cu $Q(r,s;C^*(r)C(r))$, putem deduce că aplicaţia $s \to \langle R_T(s)x, x\rangle$ este derivabilă. Astfel, obţinem

$$\frac{d}{ds}\langle R_T(s)x, x\rangle = -\langle [L^*(s)R_T(s) + C^*(s)C(s)x, x\rangle .$$

Integrând de la t la T in raport cu s şi ţinând cont de faptul că $R_T(s) \in \mathcal{E}$, vedem că $R_T(s)$ este unica soluţie clasică a ecuaţiei (3.4.4), cu condiţia finală $R_T(T) = 0$. Deci R_T satisface ecuaţia integrală

$$R_T(s)x = U^*(t,s)R_T(t)U(t,s)x + \\ + \int_s^t U^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)R_T(r)G_i(r) + C^*(r)C(r)]U(r,s)xdr,$$

oricare ar fi $T \geq t \geq s$, $x \in H$. Pentru fiecare $s \in [0,T]$, şirul $\{R_T(s)\}_{T\in\mathbf{R}_+}$ este monoton crescător şi mărginit superior. De aici rezultă că acesta este tare convergent la operatorul nenegativ $R(s)$ iar $s \to \langle R(s)x, x\rangle$ este o funcţie măsurabilă Borel. Trecând la limită pentru $T \to \infty$ in ecuaţia integrală de mai sus, deducem că $R(s)$ satisface ecuaţia de mai jos pentru orice $t \geq s$ şi $x \in H$

$$R(s)x = U^*(t,s)R(t)U(t,s)x + \\ + \int_s^t U^*(r,s)[\sum_{i=1}^m G_i^*(r)R(r)G_i(r) + C^*(r)C(r)]U(r,s)xdr.$$

Soluţia clasică $\widetilde{R}$ a ecuaţiei Lyapunov (3.4.4) cu condiţia finală $\widetilde{R}(t) = R(t)$ satisface şi ea ecuaţia de mai sus. Argumentând ca in demonstraţia Teoremei 3.4.5, deducem că $R(s) = \widetilde{R}(s)$ oricare ar fi $0 \leq s \leq t$. Cum t a fost ales arbitrar rezultă că R este o soluţie clasică pentru (3.4.4).

Pentru a demonstra unicitatea, presupunem că R_1 este o altă soluţie a ecuaţiei (3.4.4). Atunci se aplică formula lui Ito pentru funcţia $F(t,x) = \langle [R(t) - R_1(t)]x, x\rangle$ şi procesul stocastic $y(t,s;x)$ şi făcând calculele uzuale obţinem

$$\langle [R(s) - R_1(s)]x, x\rangle = E\,\langle [R(T) - R_1(T)]y(T, s; x), y(T, s; x)\rangle$$

oricare ar fi $T \geq s$ şi $x \in H$.

Deoarece ecuaţia $\{A; G_i\}$ este uniform exponenţial stabilă iar R, R_1 sunt mărginiţi pe $\mathbf{R}$, trecem la limită pentru $T \to \infty$ in ultima inegalitate şi deducem că $R(s) - R_1(s) = 0$ oricare ar fi s $\in \mathbf{R}_+$

Demonstraţia acestei implicaţii este completă .

"$\Leftarrow$" Fie R soluţia clasică unică a ecuaţiei (3.4.4) care are proprietatea (3.5.10).

Aplicând formula lui Ito funcţiei $F : \mathbf{R}_+ \times H \to \mathbf{R}, F(t,x) = \langle R(t)x, x\rangle$ şi procesului stocastic $y(t, s; x), x \in H$ şi trecând la medie, avem succesiv

$$E\,\langle R(t)y(t, s; x), y(t, s; x)\rangle = \langle R(s)x, x\rangle - E\int_s^t \langle C^*(r)C(r)y(r, s; x), y(r, s; x)\rangle\, dr$$

$$\langle R(s)x, x\rangle \;=\; E\,\langle R(t)y(t, s; x), y(t, s; x)\rangle + E\int_s^t \|C(r)y(r, s; x)\|^2\, dr$$

pentru toţi $x \in H, t \geq s \geq 0$.

Dacă $t = s + \tau,\ s \geq 0$ atunci avem $\langle R(s)x, x\rangle =$

$E\,\langle R(s+\tau)y(s+\tau, s; x), y(s+\tau, s; x)\rangle + E\int_s^{s+\tau} \|C(r)y(r, s; x)\|^2\, dr.$

Din Teorema 3.5.5 şi observabilitatea uniformă a sistemului $\{A, C; G_i\}$ deducem $\langle R(s)x, x\rangle \geq \langle Q(s+\tau, s; R(s+\tau))x, x\rangle + \gamma\,\|x\|^2$, $x \in H$.

Aplicăm (3.5.10) şi avem

$(1 - \frac{\gamma}{M})\,\langle R(s)x, x\rangle \geq \langle Q(s+\tau, s; R(s+\tau))x, x\rangle$ oricare ar fi $x \in H$.

Dacă inlocuim x cu $y(s, p; x), s \geq p \geq 0, x \in H$, obţinem, prin trecere la medie,

$(1-\frac{\gamma}{M})E\,\langle R(s)y(s, p; x), y(s, p; x)\rangle \geq E < Q(s+\tau, s; R(s+\tau))y(s, p; x),$

$y(s,p;x)\rangle$ .Folosim din nou Teorema 3.5.5 şi avem $(1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})\langle Q(s,p;R(s))x,x\rangle \geq \langle Q(s,p;Q(s+\tau,s;R(s+\tau)))x,x\rangle$.

Din unicitatea soluţiei ecuaţiei (3.5.3) deducem că $(1-\frac{\gamma}{\widetilde{M}})\langle Q(s,p;R(s))x,x\rangle \geq \langle Q(s+\tau,p;R(s+\tau))x,x\rangle$ pentru toţi $s+\tau \geq p \geq 0$.

De aici demonstraţia decurge in acelaşi mod cu cea a Teoremei 3.4.5 şi rezultă că există constantele $a \in (0,1)$ şi $\beta > 1$ astfel incât $E\left\|y(s,p;x)\right\|^2 \leq \beta a^{s-p}\left\|x\right\|^2$ oricare ar fi $x \in H$ şi $s \geq p \geq 0$. □

6. Comportări asimptotice ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale stocastice cu coeficienţi invarianţi in timp

În acest paragraf sunt particularizate rezulatele paragrafelor 2 şi 4 pentru cazul sistemelor autonome. Demonstraţiile au fost refăcute deoarece in cea mai mare parte sunt diferite de cele din cazul general.

6.1. Reprezentări ale soluţiilor de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale stocastice in raport cu soluţiile ecuaţiilor Lyapunov. Considerăm ecuaţia

$$dy(t) = Ay(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i y(t)dw_i(t), \tag{3.6.1}$$

$$y(s) = x \in H,$$

unde A este generatorul infinitesimal al unui C_0-semigrup $S(.)$, $G_i \in L(H), i = 1,...,m$ şi w_i sunt procese Wiener reale in raport cu $\mathcal{F}_t$, independente.

În acest caz (3.6.1) are o soluţie de evoluţie unică in $C([s,T];$ $L^2(\Omega;H))$ care este adaptată la $\mathcal{F}_t$, anume, soluţia ecuaţiei

$$y(t) = S(t-s)x + \sum_{i=1}^{m} \int_s^t S(t-r)G_i y(r)dw_i(r). \tag{3.6.2}$$

Introducem următoarea ecuaţie Lyapunov

$$\frac{dQ(s)}{ds} + A^*Q(s) + Q(s)A + \sum_{i=1}^{m} G_i^*Q(s)G_i = 0, s \geq 0 \tag{3.6.3}$$

unde A şi G_i sunt definiţi ca mai sus şi ecuaţia aproximantă:

$$\frac{dQ_n(s)}{ds} + A_n^*Q_n(s) + Q_n(s)A_n + \sum_{i=1}^{m} G_i^*Q_n(s)G_i = 0, s \geq 0. \tag{3.6.4}$$

unde A_n , $n \in \mathbf{N}$ sunt aproximările Yosida ale lui A.

Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ definim funcţia $L_n : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$,

$$L_n(P) = A_nP + PA_n^* + \sum_{i=1}^{m} G_iPG_i^*, P \in \mathcal{H}_2.$$

şi este clar că $L_n \in L(\mathcal{H}_2)$. Dacă $\mathcal{S}_n$ este C_0-semigrupul generat de L_n in $\mathcal{H}_2$ atunci putem arăta ca şi in subparagraful 5.1 al acestui capitol că

$$\text{dacă } R \in \mathcal{H}_2, R \geq 0 \text{ atunci } Q_n(t,s;R) = \mathcal{S}_n^*(t-s)(R)$$

oricare ar fi $t \geq s \geq 0$, unde am notat prin $Q_n(t,s;R)$ soluţia clasică a ecuaţiei (3.6.4), cu condiţia finală $Q_n(t) = R \in \mathcal{H}_2, t \geq s$.

În acest moment este clar că avem şi

$$Q_n(t-s,0;R) = \mathcal{S}_n^*(t-s)(R) = Q_n(t,s;R) \tag{3.6.5}$$

Aplicăm Teorema 3.2.8 şi deducem că $E\,\|B\ y(t,s;x)\|^2 = \langle Q(t,s;B^*B)x,x\rangle$ oricare ar fi $B \in L(H,U), x \in H$ şi $t \geq s \geq 0$. Din demonstraţia punctului b) al teoremei amintite mai sus şi (3.6.5) rezultă că

(3.6.6)
$$E\,\|B\ y(t,s;x)\|^2 = \langle Q(t,s;B^*B)x,x\rangle = \langle Q(t-s,0;B^*B)x,x\rangle$$

oricare ar fi $B \in L(H,U), x \in H$ şi $t \geq s \geq 0$.

Facem observaţia că acelaşi rezultat se poate obţine printr-o simplă schimbare de variabilă in ecuaţia integrală ce defineşte soluţia de evoluţie $Q(t,s;R)$.

6.2. Stabilitatea exponenţială uniformă a sistemelor uniform observabile. În cele ce urmează considerăm ecuaţia (3.6.1) împreună cu relaţia de observare

$$z(t) = Cy(t,s,x), \tag{3.6.7}$$

unde $C \in L(H,V)$ iar $y(t,s,x)$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (3.6.1). Vom folosi notaţia $\{A;G_i\}$ pentru ecuaţia (3.6.1) şi $\{A,C;G_i\}$ pentru sistemul format din (3.6.1) şi (3.6.7).

Fie ecuaţia algebrică Lyapunov

$$A^*R + RA + \sum_{i=1}^{m} G_i^* R G_i + C^*C = 0 \tag{3.6.8}$$

Atunci are loc teorema de mai jos

Teorema 3.6.1. *Presupunem că A este generatorul infinitesimal al C_0-semigrupului $S, G_i \in L(H),\ C \in L(H,V)$. Dacă $\{A,C;G_i\}$ este uniform observabil atunci ecuaţia $\{A;G_i\}$ este uniform exponenţial* *stabilă dacă și numai dacă ecuaţia (3.6.8) admite o soluţie R unică cu proprietatea că există constantele pozitive $\widetilde{m}$, $\widetilde{M}$ astfel incât*

$$\widetilde{m}\,\|x\|^2 \leq \langle Rx, x\rangle \leq \widetilde{M}\,\|x\|^2 \tag{3.6.9}$$

pentru toţi $x \in H$.

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Considerăm operatorul liniar şi nenegativ R care satisface egalitatea

$$\langle Rx, x\rangle = E\int_s^\infty \|Cy(r,s;x)\|^2\,dr. \tag{3.6.10}$$

În primul rând vom observa că integrala $E\int_s^\infty \|Cy(r,s;x)\|^2\,dr$ este bine definită şi apoi vom demonstra că R nu depinde de s. Deoarece $C \in L(H,V)$ avem

$0 \leq \langle Rx, x\rangle \leq \|C\|^2 \int_s^\infty E\,\|y(r,s;x)\|^2\,dr \leq \|C\|^2 \int_s^\infty Me^{-\omega(r-s)}\,\|x\|^2\,dr < \|C\|^2\,\frac{M}{\omega}\,\|x\|^2.$

Acum este clar că relaţia (3.6.10) defineşte in mod unic un operator care aparţine lui $L^+(H)$.

Pe de altă parte aplicăm Fubini şi (3.6.6) şi avem

$$E\int_s^\infty \|Cy(r,s;x)\|^2\,dr = \int_s^\infty E\,\|Cy(r,s;x)\|^2\,dr =$$

$$\int_s^\infty \langle Q(r,s;C^*C)x, x\rangle\,dr = \int_s^\infty \langle Q(r-s,0;C^*C)x, x\rangle\,dr$$

Făcând schimbarea de variabilă $u = r - s$ in ultima integrală deducem că $E\int_s^\infty \|Cy(r,s;x)\|^2\,dr = \int_0^\infty \langle Q(u,0;C^*C)x, x\rangle\,du$ şi de aici rezultă faptul că R nu depinde de $s \geq 0$. Deci

$$\langle Rx, x\rangle = \int_s^\infty \langle Q(r,s;C^*C)x, x\rangle\,dr \tag{3.6.11}$$

Din observabilitatea uniformă a lui $\{A, C; G_i\}$ deducem că există constantele reale $\tau, \gamma > 0$ astfel incât

$\langle Rx, x\rangle \geq \int\limits_t^{t+\tau} \langle C^*Cy(r,t;x), y(r,t;x)\rangle\, dr \geq \gamma \|x\|^2$ pentru oricare $t \in \mathbf{R}_+$ şi $x \in H$. Luăm $\widetilde{m} = \gamma$ şi $\widetilde{M} = \widetilde{C}^2 \frac{M}{\omega}$ şi vedem că R satisface (3.6.9).

Fie $T > 0$. Dacă $y_n(t,s;\xi)$ este soluţia clasică a ecuaţiei (1.4.3), vom considera operatorul liniar nenegativ $R_T^n(s)$ definit de relaţia $\langle R_T^n(s)x, x\rangle = E\int\limits_s^T \|Cy_n(r,s;x)\|^2\, dr$. Din Teorema 3.2.8 se deduce că $\langle R_T^n(s)x, x\rangle = \int\limits_s^T \langle Q_n(r-s, 0; C^*C)x, x\rangle\, dr$. Deoarece funcţia $p \to Q_n(p, 0; C^*C)x$ este Bochner integrabilă pe $[0, T-s]$ obţinem $R_T^n(s)x = \int\limits_s^T Q_n(r-s, 0; C^*C)xdr$. Diferenţiând ultima egalitate in raport cu s deducem că $R_T^n(s)$ este unica soluţie clasică a ecuaţiei (3.4.5) cu condiţia finală $R_T^n(T) = 0$ considerată pentru cazul staţionar. Trecem la limită pentru $n \to \infty$ şi deducem conform Lemei 3.2.1 că $R_T^n(s)x \underset{n\to\infty}{\to} R_T(s)x = \int\limits_s^T Q(r,s;C^*C)xdr$ oricare ar fi $x \in H$, unde $R_T(s)x$ este unica soluţie de evoluţie a ecuaţiei Lyapunov

$$\text{(3.6.12)}\quad \frac{dR(s)}{ds} + A^*R(s) + R(s)A + \sum_{i=1}^m G_i^*R(s)G_i + C^*C = 0, s \geq 0$$

cu condiţia finală $R_T(T) = 0$. Deoarece funcţia $T \to R_T(s)$ este crescătoare şi mărginită superior pe $\mathbf{R}_+$, pentru orice s fixat, este clar că şirul $\{R_T(s)\}_T$ converge (când $T \to \infty$) in topologia tare la operatorul R care este soluţia ecuaţiei integrale de mai jos

$$Rx = S^*(t-s)RS(t-s)x + \int_s^t S^*(r-s)[\sum_{i=1}^m G_i^*RG_i + C^*C]S(r-s)xdr.$$

Pentru a demonstra unicitatea, presupunem că R_1 este o altă soluţie nenegativă a ecuaţiei (3.6.8) care are proprietatea (3.6.9).

Este evident faptul că $R_1(s) = R_1$ este soluţie a ecuaţiei (3.6.12) care satisface (3.4.7) şi conform Teoremei 3.5.7 deducem că $R_1 = R$. Demonstraţia acestei implicaţii este completă .

"$\Leftarrow$" Fie R soluţia ecuaţiei (3.6.12) care satisface (3.4.7).

Aplicând formula lui Ito funcţiei $F : \mathbf{R}_+ \times H \to \mathbf{R}, F(t, x) = \langle Rx, x\rangle$ şi procesului stocastic $y(t, s; x), h \in H$ şi trecând la medie avem

$E\langle Ry(t, s; x), y(t, s; x)\rangle = \langle Rx, x\rangle - E\int\limits_s^t \langle C^*Cy(r, s; x), y(r, s; x)\rangle\, dr$

oricare ar fi $x \in H, t \geq s \geq 0$. Astfel, obţinem

$\langle Rx, x\rangle = E\langle Ry(t, s; x), y(t, s; x)\rangle + E\int\limits_s^t \|Cy(r, s; x)\|^2\, dr\ ,\ x \in H.$

Fie τ, γ constantele din Definiţia 3.4.1. Luăm $t = s + \tau\ ,\ s \geq 0$ şi avem

$\langle Rx, x\rangle = E\langle Ry(s + \tau, s; x), y(s + \tau, s; x)\rangle + E\int\limits_s^{s+\tau} \|Cy(r, s; x)\|^2\, dr.$

Din Teorema 3.2.8 şi ţinând cont de observabilitatea uniformă a sistemului $\{A, C; G_i\}$ deducem $\langle Rx, x\rangle \geq \langle Q(s + \tau, s; R)x, x\rangle + \gamma\|x\|^2$ pentru toţi $x \in H$. Conform (3.6.9) avem

$(1 - \frac{\gamma}{\widetilde{M}})\langle Rx, x\rangle \geq \langle Q(s + \tau, s; R)x, x\rangle$ oricare ar fi $x \in H$.

Dacă inlocuim x cu $y(s, p; x), s \geq p \geq 0, x \in H$, trecem la medie in inegalitatea de mai sus şi aplicăm Teorema 3.2.8 deducem că $(1 - \frac{\gamma}{\widetilde{M}})\langle Q(s, p; R)x, x\rangle \geq \langle Q(s, p; Q(s + \tau, s; R))x, x\rangle$ oricare ar fi $s + \tau \geq p \geq 0$. Ţinând cont de unicitatea soluţiei ecuaţiei (3.6.3) obţinem $(1 - \frac{\gamma}{\widetilde{M}})\langle Q(s, p; R)x, x\rangle \geq \langle Q(s + \tau, p; R)x, x\rangle$ oricare ar fi $s + \tau \geq p \geq 0$ şi $x \in H$.

Fie $t \geq p \geq 0$. Atunci există $n \in \mathbf{N}$ astfel incât $t - p = n\tau + r, 0 \leq r < \tau$. Este uşor de văzut că avem

$$\langle Q(t, p; R)x, x\rangle \leq (1 - \frac{\gamma}{\widetilde{M}})^n \langle Q(r + p, p; R)x, x\rangle\ .$$

Folosind (3.6.9), monotonia soluţiei $Q(t,p;R)$ in condiţiile iniţiale şi relaţia 3.6.6, obţinem

$$\widetilde{m}E\left\|y(t,p;x)\right\|^2 \leq (1-\gamma/\widetilde{M})^n\widetilde{M}E\left\|y(r+p,p;x)\right\|^2.$$

Se cunoaşte ([**55**]) faptul că, in cazul C_0- semigrupurilor, are loc relaţia $\|S(t)\| \leq M_0e^{\omega t}$ oricare ar fi $t \in \mathbf{R}_+$. Din (3.6.2) avem

$$E\left\|y(r+p,p;x)\right\|^2 \leq (m+1)[\left\|S(r)\right\|^2\left\|x\right\|^2 + \\ + \sum_{i=1}^{m}\int_p^{r+p}\left\|S(r+p-s)\right\|\left\|G_i\right\|^2 E\left\|y(s,p;x)\right\|^2 ds].$$

Atunci obţinem

$$E\left\|y(r+p,p;x)\right\|^2 \leq (m+1)M_0^2e^{2\omega\tau}[\left\|x\right\|^2 + \sum_{i=1}^{m}\left\|G_i\right\|^2\int_p^{r+p}E\left\|y(s,p;x)\right\|^2 ds].$$

Aplicăm inegalitatea lui Gronwall şi este clar că dacă

$$K(r) = (m+1)M_0^2e^{2\omega\tau}\exp[(m+1)\sum_{i=1}^{m}\left\|G_i\right\|^2 M_0^2e^{2\omega\tau}\tau]$$

şi $K(\tau) = K$ atunci $E\left\|y(r+p,p;x)\right\|^2 \leq K\left\|x\right\|^2$.

Astfel, $E\left\|y(t,p;x)\right\|^2 \leq [(1-\gamma/\widetilde{M})^{1/\tau}]^{t-p}K(\widetilde{M}/\widetilde{m})(1-\gamma/\widetilde{M})^{-1}]\left\|x\right\|^2$, oricare ar fi $x \in H$. Obţinem concluzia. □

7. Ecuaţia Riccati asociată controlului liniar pătratic

G. Da Prato şi I. Ichikawa au demonstrat in [**10**] că dacă ecuaţia cu control $\{A,B;G_i\}$ *este stabilizabilă* (Definiţia 3.7.2) şi sistemul $\{A,C;G_i\}$ este *detectabil* (Definiţia 3.7.1) atunci ecuaţia Riccati (3.7.4) asociată problemei controlului liniar pătratic are o soluţie unică şi mărginită pe $\mathbf{R}_+$(Teorema 4.1 din [**10**]) care este stabilizantă pentru $\{A,B;G_i\}$. În acest paragraf condiţia de detectabilitate a fost inlocuită cu cea de observabilitate uniformă şi am obţinut aceeaşi concluzie (pentru cazul finit dimensional se poate vedea lucrarea [**48**]).

În subparagraful 2 al secţiunii de faţă am construit un contra-exemplu care demonstrează că, in cazul stocastic, controlabilitatea uniformă nu implică stabilizabilitatea. În consecinţă, observabilitatea uniformă nu implică detectabilitatea şi rezultatul amintit mai sus este distinct de cel obţinut de G.Da Prato şi I. Ichikawa.

7.1. Stabilizabilitate, detectabilitate, observabilitate uniformă şi controlabilitate uniformă pentru ecuaţii diferenţiale stocastice. Fie H, V spaţii Hilbert reale, separabile. Considerăm sistemul observat $\{A, C; G_i\}$ considerat in paragraful 3 al capitoluilui de faţă unde $G_i \in C_b([0,\infty), L(H)), i = 1, ..., m$, $C \in C_b([0,\infty), L(H, V))$.

Definiţia 3.7.1. (a se vedea [**47**],[**10**]) Fie $D \in C_b([0,\infty), L(H))$. *Spunem că ecuaţia* $\{A, D; G_i\}$ *este detectabilă dacă există* $L \in C_b([0,\infty), L(H))$ *astfel incât* $\{A + LD; G_i\}$ *este uniform exponenţial stabilă.*

Dacă U este un alt spaţiu Hilbert real, separabil şi $B \in C_s([0,\infty), L(U, H)) \cap L^\infty(\mathbf{R}_+, L(U, H))$ asociem lui (1.4.1) următoarea ecuaţie diferenţială stocastică cu control

$$\begin{aligned} dy(t) &= A(t)y(t)dt + B(t)u(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)y(t)dw_i(t) \\ y(s) &= x \end{aligned}$$

notată $\{A, B; G_i\}$.

Definiţia 3.7.2. ([**10**]) *Spunem că* $\{A, B; G_i\}$ *este stabilizabilă dacă există* $F \in C_b([0,\infty), L(H, U))$ *astfel incât* $\{A + BF; G_i\}$ *este uniform exponenţial stabilă.*

În cazul determinist este cunoscut faptul că (a se vedea [**59**] pentru cazul sistemelor autonome) observabilitatea uniformă implică detectabilitate. Vom demonstra in continuare că această afirmaţie nu este adevărată in cazul stocastic .

7.2. Contra exemplu pentru implicaţia "controlabilitate uniformă implică stabilizabilitate". Presupunem că $H = \mathbf{R}^n, V = \mathbf{R}^p$ şi $U = \mathbf{R}^d$ (unde $\mathbf{R}^n$ este spaţiul real n-dimensional) şi funcţiile A, B, C şi G_i, definite pe intreaga axă reală $\mathbf{R}$ sunt continue şi mărginite. Notăm cu $\mathcal{E}$ subspaţiul lui $L(H)$ format din toţi operatorii autoadjuncţi. Fie $Y(t,s), t \geq s$ matricea fundamentală stocastică asociată ecuaţiei (1.4.1)(a se vedea [**47**]). Avem nevoie de următoarea definiţie:

Definiţia 3.7.3. *Spunem că $\{A, B; G_i\}$ este uniform controlabilă dacă există $\tau > 0$ şi $\gamma > 0$ astfel incât*

$$E \int_{s-\tau}^{s} Y(s,t)B(t)B^*(t)Y^*(s,t)dt \geq \gamma I$$

pentru toţi $s \in \mathbf{R}$, unde I este operatorul identic pe H.

Observăm că dacă $G_i = 0$ şi $Y(s,t)$ este inlocuit cu operatorul de evoluţie $U(s,t)$ asociat familiei $A(t), t \in \mathbf{R}$ obţinem definiţia controlabilităţii uniforme a ecuaţiei deterministe $\{A, B\}$.

În mod similar, Definiţia 3.3.1 poate fi extinsă pentru toţi $s \in \mathbf{R}$. Astfel, din corolarele C.1 şi C.2 din [**47**] deducem: controlabilitatea uniformă implică (sau nu) stabilizabilitatea dacă şi numai dacă detectabilitatea implică (sau nu) observabilitatea.

Presupunem că toţi operatorii sunt constanţi, $m = 1$ şi $G_1 = G$.

Observaţia 3.7.4. *În* [**10**] *se demonstrează că dacă* $\{A, B; G\}$ *este stabilizabilă atunci există o soluţie in* $L^+(H)$ *a ecuaţiei Riccati*

$$A^*K + KA + G^*KG + I - KBB^*K = 0 \tag{3.7.1}$$

Lema 3.7.5. *(*[**68**]*) Dacă ecuaţia deterministă*

$$dy(t) = Ay(t)dt + Bu(t)dt$$
$$y(s) = x,\ x \in H,$$

notată $\{A, B\}$ *este uniform controlabilă (a se vedea observaţia făcută in cadrul Definiţiei 3.7.3) atunci ecuaţia stocastică* $\{A, B; G\}$ *este uniform controlabilă.*

Demonstraţie. Din Propoziţia P.1 din [**47**] se deduce că $\{A, B\}$ este uniform controlabilă dacă şi numai dacă există $\tau > 0$ şi $\gamma > 0$ astfel incât $\int\limits_{s-\tau}^{s} S(s-t)(BB^*)dt \geq \gamma I$ pentru toţi $s \in \mathbf{R}$, unde $S(t)$ este C_0- semigrupul pe $\mathcal{E}$ generat de operatorul liniar şi mărginit $\widetilde{M} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\widetilde{M}(P) = AP + PA^*$. În consecinţă $S(t)(K) = e^{t\widetilde{M}}(K)$.

Dacă notăm cu $\widetilde{G}$ operatorul liniar şi mărginit din $L(\mathcal{E})$ definit de formula $\widetilde{G}(K) = GKG^*$ este uşor de constatat, conform propoziţiei P.1 din [**47**], că $\{A, B; G\}$ este uniform controlabilă dacă şi numai dacă există $\tau > 0$ şi $\gamma > 0$ astfel incât $\int\limits_{s-\tau}^{s} e^{(s-t)(\widetilde{M}+\widetilde{G})}BB^*dt \geq \gamma I$ pentru toţi $s \in \mathbf{R}$.

Deoarece soluţia ecuaţiei $\frac{dR(t)}{dt} = (\widetilde{M} + \widetilde{G})(R(t))$ cu condiţia iniţială $R(s) = BB^*, t \geq s \geq 0$ satisface ecuaţia integrală (conform formulei variaţiei constantelor)

$$R(t) = e^{(t-s)\widetilde{M}}(BB^*) + \int\limits_{s}^{t} e^{(t-r)\widetilde{M}}\widetilde{G}(R(r))dr$$

iar, pe de altă parte, avem $R(t) = e^{(t-s)(\widetilde{M}+\widetilde{G})}(BB^*) \geq 0$, $\widetilde{G}(R(r)) \geq 0$ şi $e^{(t-s)\widetilde{M}}(K) \geq 0$, pentru orice $K \in L^+(H)$ atunci deducem că $e^{(t-s)(\widetilde{M}+\widetilde{G})}(BB^*) \geq e^{(t-s)\widetilde{M}}(BB^*)$ oricare ar fi $t \geq s \geq 0$.

Din ipoteză, rezultă că avem $\int\limits_{s-\tau}^{s} e^{(s-t)\widetilde{M}}BB^*dt \geq \gamma I$ pentru toţi $s \in \mathbf{R}$ şi, conform inegalităţii de mai sus, rezultă că ecuaţia $\{A, B; G\}$ *este uniform controlabilă.* □

Observaţia 3.7.6. *Lema de mai sus este demonstrată in* [**65**] *in ipoteza că operatorii A şi G comută dar, conform observaţiei, d-lui prof. Morozan acest lucru se intâmplă totdeauna.*

Contra -Exemplu ([**65**])

Considerăm ecuaţia stocastică $\{A, B; G\}$ in cazul particular in care $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Este uşor de văzut că $AG = GA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Deoarece $rang(B, AB) = 2$ deducem că ecuaţia $\{A, B\}$ este uniform controlabilă ([**9**]) şi, conform lemei precedente, putem afirma că $\{A, B; G\}$ este uniform controlabilă. Vom demonstra că ecuaţia cu control $\{A, B; G\}$ nu este stabilizabilă. Presupunem prin absurd că $\{A, B; G\}$ este stabilizabilă. Atunci din Observaţia 3.7.4 deducem că există o soluţie K in $L^+(H)$ a ecuaţiei Riccati (3.7.1). Atunci $K = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ şi satisface condiţia de nenegativitate

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 x_3 \geq x_2^2 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right. . \tag{3.7.2}$$

Prin calcul se obţine sistemul de mai jos, care este echivalent cu ecuaţia Riccati (3.7.1):

$$\left\{\begin{array}{c}(x_1+x_2)^2=3x_1+1\\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)=3x_2\\ (x_2+x_3)^2=4x_3+1\end{array}\right. . \tag{3.7.3}$$

Pentru a rezolva sistemul (3.7.3) distingem următoarele situaţii:

a) dacă $x_1+x_2=0$ (respectiv $x_2+x_3=0$) atunci avem $x_1=-1/3$ (respectiv $x_3=-1/4$). Astfel este contrazisă condiţia (3.7.2);

b) dacă $x_1+x_2\neq 0$ şi $\mathrm{x}_2+x_3\neq 0$, obţinem $\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}=\frac{3x_1+1}{3x_2}=\frac{3x_2}{4x_3+1}$. De aici rezultă sucesiv

$$9x_2^2=12x_1x_3+3x_1+4x_3+1>12x_1x_3\text{şi}$$

$$9/12x_2^2>x_1x_3.$$

Din (3.7.2) deducem

$$9/12x_2^2>x_2^2$$

şi obţinem o nouă contradicţie. Astfel, presupunerea că ecuaţia cu control $\{A,B;G\}$ este stabilizabilă este falsă şi am demonstrat că există ecuaţii stocastice care sunt uniform controlabile, fără a fi stabilizabile. Din cele spuse mai sus, şi, conform corolarelor C.1 şi C.2 din [**47**], rezultă că observabilitatea uniformă nu implică detectabilitate.

7.3. Soluţii mărginite ale ecuaţiilor Riccati asociate problemei controlului liniar pătratic. Presupunem peste tot in acest paragraf că este satisfăcută ipoteza P_1 , $B\in C_b([0,\infty),L(U,H)),B^*\in C_b([0,\infty),L(H,U)),G_i\in C_b([0,\infty),L(H)),C\in C_b([0,\infty),L(H,V)),$

$K(t) \in C_b([0,\infty), L(U))$ şi există $\delta_0 > 0$ astfel incât $K(t) \geq \delta_0 I$ pentru toţi $t \in [0,\infty)$. Considerăm următoarea ecuaţie Riccati

(3.7.4)

$$P'(s) + A^*(s)P(s) + P(s)A(s) + \sum_{i=1}^{m} G_i^*(s)P(s)G_i(s) + C^*(s)C(s) -$$

$$-P(s)B(s)(K(s))^{-1}B^*(s)P(s) = 0.$$

Spunem că P este soluţie de evoluţie a ecuaţiei (3.7.4) pe un interval J (a se vedea [**10**]), dacă $P \in C_s(J, L^+(H))$ şi

$$P(s)x = U^*(t,s)P(t)U(t,s)x + \tag{3.7.5}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_s^t U^*(r,s)[G_i^*(r)P(r)G_i(r) + C^*(r)C(r) -$$

$$P(r)B(r)(K(r))^{-1}B^*(r)P(r)]U(r,s)x dr$$

pentru toţi $s \leq t, s, t \in J$. Mai mult , dacă P este o soluţie de evoluţie a lui (3.7.4) pe $\mathbf{R}_+$ şi $\sup\limits_{s\in\mathbf{R}_+} \|P(s)\| < \infty$ atunci P se numeşte soluţie mărginită. Dacă

$$P_n'(s) + A_n^*(s)P_n(s) + P_n(s)A_n(s) + \tag{3.7.6}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} G_i^*(s)P_n(s)G_i(s) + C^*(s)C(s) - P_n(s)B(s)(K(s))^{-1}B^*(s)P_n(s) = 0$$

este ecuaţia aproximantă a ecuaţiei (3.7.4) atunci avem lema următoare (a se vedea [**10**]):

Lema 3.7.7. *Presupunem că are loc P_1, $0 < T < \infty$ şi $R \in L^+(H)$. Atunci există o soluţie de evoluţie (resp. clasică) P (resp. P_n) unică a lui (3.7.4) (resp. (3.7.6) pe $[0,T]$ astfel incât $P(T) = R$*

(resp. $P_n(T) = R$) şi $P_n(s)x \to P(s)x$ uniform pe $[0, T]$ pentru orice $x \in H$.

Definiţia 3.7.8. ([**47**]) *O soluţie de evoluţie autoadjunctă a lui (3.7.4) se numeşte stabilizantă pentru $\{A, B; G_i\}$ dacă $\{A + BS; G_i\}$ este uniform exponenţial stabilă, unde $S(t) = -\ (K(t))^{-1}B^*(t)P(t)$.*

Teorema de mai jos este demonstată in ([**48**]) pentru cazul spaţiilor finit dimensionale.

Teorema 3.7.9. [**68**]*Presupunem că $\{A, C; G_i\}$ este uniform observabil şi operatorul de evoluţie relativ la $A(t)$ satisface ipoteza P_2. Dacă $P(t)$ este o soluţie de evoluţie nenegativă şi mărginită a lui (3.7.4) atunci*

a) există $\delta > 0$ astfel incât $P(t) \geq \delta I$ pentru toţi $t \in [0, \infty)$(P este uniform pozitivă.)

b) P este soluţie de evoluţie stabilizantă .

Demonstraţie. Idea principală de demonstraţie este preluată din [**48**]. Fie $P(t)$ o soluţie de evoluţie nenegativă şi mărginită a lui (3.7.4) .Considerăm ecuaţia

$$dz(t) = [A(t) + B(t)S(t)]z(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)z(t)dw_i(t) \tag{3.7.7}$$

$$z(s) = x, t \geq s$$

unde S a fost introdus in Definiţia 3.7.8.

Introducem şi ecuaţia aproximantă a acesteia ca fiind

$$dz_n(t) = [A_n(t) + B(t)S(t)]z_n(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i(t)z_n(t)dw_i(t) \tag{3.7.8}$$

$$z_n(s) = x, t \geq s$$

unde $A_n(t)$ sunt aproximările Yosida ale operatorului $A(t)$. Dacă $z(t,s;x)$ este soluţia de evoluţie a lui *(3.7.7)* (aceasta există, conform Lemei 1.4.8) atunci introducem operatorul liniar şi nenegativ $Q(s)$, care satisface relaţia

(3.7.9)

$$\langle Q(s)x, x\rangle = E\int_s^{s+\tau} \|C(t)z(t,s;x)\|^2 + \langle S^*(t)K(t)S(t)z(t,s;x), z(t,s;x)\rangle\, dt$$

unde $\tau > 0$ este cel din Definiţia 3.4.1. Este clar că relaţia de mai sus defineşte un operator $Q(s)$ liniar şi nenegativ unic.

Vom demonstra că $inf\{\langle Q(s)x,x\rangle, s \geq 0, x \in H, \|x\| = 1\} > 0$. Presupunem prin absurd că

$$inf\{\langle Q(s)x,x\rangle, s \geq 0, x \in H, \|x\| = 1\} = 0.$$

Atunci, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $s_\varepsilon \in [0,\infty), \widehat{x}_\varepsilon \in H$, $\|\widehat{x}_\varepsilon\| = 1$, astfel incât

$$\langle Q(s_\varepsilon)\widehat{x}_\varepsilon, \widehat{x}_\varepsilon\rangle < \varepsilon.$$

Fie $z_\varepsilon(t) = z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon), u_\varepsilon(t) = S(t)z_\varepsilon(t)$ pentru toţi $t \geq s_\varepsilon$. Atunci avem $\varepsilon > \langle Q(s_\varepsilon)\widehat{x}_\varepsilon, \widehat{x}_\varepsilon\rangle \geq$

$\geq E\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} \langle K(t)S(t)z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon), S(t)z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\rangle\, dt \geq \delta_0 E\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} \|u_\varepsilon(t)\|^2\, dt.$

Astfel,

$$\varepsilon \geq \delta_0 E\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} \|u_\varepsilon(t)\|^2\, dt. \tag{3.7.10}$$

Pe de altă parte, avem $\varepsilon > \langle Q(s_\varepsilon)\widehat{x}_\varepsilon, \widehat{x}_\varepsilon\rangle \geq E\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} \|C(t)z_\varepsilon(t)\|^2\,dt$ şi

(3.7.11)

$$\varepsilon \geq 1/2E\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} \|C(t)y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\|^2\,dt - E\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} \|C(t)[y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon) - z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)]\|^2\,dt$$

unde $y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)$ este soluţia de evoluţie a ecuaţiei diferenţiale stocastice (1.4.1) (cu condiţia iniţială $y(s_\varepsilon) = \widehat{x}_\varepsilon$). Dacă $\widehat{C} = \sup\limits_{0\leq r<\infty} \|C(r)\|$ atunci putem folosi teorema lui Fubini pentru a permuta media cu integrala şi avem

$$\varepsilon > 1/2[E\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} \|C(t)y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\|^2\,dt - \widehat{C}^2\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} E\,\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon) - z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\|^2\,dt.$$

Pentru a termina demonstraţia avem nevoie de o majorare pentru integrala

$$\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} E\,\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon) - z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\|^2\,dt.$$

În continuare vom arăta că avem indeplinite ipotezele Lemei 1.4.8. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\|S(r)\| &= \sup_{r\in\mathbf{R}_+} \left\|K^{-1}(r)B^*(r)P(r)\right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta_0}\sup_{r\in\mathbf{R}_+}\|B^*(r)\| \sup_{r\in\mathbf{R}_+}\|P(r)\| < \infty\end{aligned}$$

şi, deoarece K^{-1} şi S sunt tare continui, rezultă că $BS \in C_b(\mathbf{R}_+, L(H))$.

Astfel, putem aplica Lema 1.4.8 şi ţinând cont de ecuaţiile integrale pe care le satisfac soluţiile de evoluţie ale ecuaţiilor (1.4.1) şi *(3.7.7)* avem

$$z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon) - y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon) = \int_{s_\varepsilon}^{t} U(t,r)B(r)S(r)z(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)dr +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_{s_\varepsilon}^{t} U(t,r)G_i(r)z(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon) - U(t,r)G_i(r)y(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)dw_i(r).$$

Trecând la medie pătratică şi aplicând teorema lui Fubini obţinem

$$E\left\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 \le (m+1)(\int_{s_\varepsilon}^{t} E\left\|U(t,r)B(r)S(r)z(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 dr+$$

$+\sum_{i=1}^{m}\int_{s_\varepsilon}^{t} E\left\|U(t,r)G_i(r)[z(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-y(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)]\right\|^2 dr)$. Aplicând Lema 1.4.9, teorema lui Fubini şi ţinând cont de faptul că $U(t,s)$ este un operator de evoluţie cu creştere exponenţială rezultă
$E\left\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 \le (m+1)[M_0^2e^{2\omega\tau}\widetilde{B}^2\int_{s_\varepsilon}^{s_\varepsilon+\tau} E\left\|S(r)z(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 dr+$
$M_0^2e^{2\omega\tau}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i^2\int_{s_\varepsilon}^{t} E\left\|y(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-z(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 dr]$,
pentru toţi $t\in[s_\varepsilon,s_\varepsilon+\tau]$. Conform (3.7.10) avem

$E\left\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 \le (m+1)[M_0^2e^{2\omega\tau}\widetilde{B}^2\varepsilon/\delta_0+$
$+M_0^2e^{2\omega\tau}\sum_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i^2\int_{s_\varepsilon}^{t} E\left\|z(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-y(r,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 dr]$, unde $\widetilde{B}=\sup_{t\in\mathbf{R}_+}\|B(t)\|$.

Deoarece $t\to E\left\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2$ este funcţie continuă putem aplica inegalitatea lui Gronwall şi obţinem $E\left\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 \le (m+1)(M_0^2e^{2\omega\tau}\widetilde{B}^2\varepsilon/\delta_0)\exp(\tau M_0^2e^{2\omega\tau}(m+1)\sum_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i^2)$.

Dacă luăm $r_1=1/\delta_0\cdot(m+1)(M_0^2e^{2\omega\tau}\widetilde{B}^2)\exp(\tau M_0^2e^{2\omega\tau}(m+1)\sum_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i^2)$ avem $E\left\|y(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)-z(t,s_\varepsilon;\widehat{x}_\varepsilon)\right\|^2 \le \varepsilon r_1$.

Deoarece $\{A,C;G_i\}$is uniform observabil, (3.7.11) devine $\varepsilon\ge(1/2)\gamma-r_1\varepsilon$ unde γ este cel din Definiţia 3.4.1. Deoarece $\varepsilon>0$ este arbitrar am obţinut o contradicţie. De aici rezultă că există $r_2>0$ astfel incât

$$\langle Q(t)x,x\rangle \ge r_2\|x\|^2 \tag{3.7.12}$$

pentru toţi $t\in\ \mathbf{R}_+$ şi $x\in\ H$.

Acum aplicăm formula lui Ito pentru soluţia clasică a lui (3.7.8) şi funcţia $v_n(t,x) = \langle P_n(t)x, x\rangle$, unde $P_n(t) = P_n(s+\tau, t, P(s+\tau))$ este soluţia clasică a lui (3.7.6) cu condiţia finală $P_n(s+\tau) = P(s+\tau)$ şi $P(s)$ este soluţia de evoluţie mărginită a ecuaţiei (3.7.4).

$$dv_n(t, z_n(t,s;x)) = [< -P_n(t)A_n(t) - A_n^*(t)P_n(t) - \sum_{i=1}^{m} G_i^*(t)P_n(t)G_i(t) -$$
$$C^*(t)C(t) + P_n(t)B(t)(K(t))^{-1}B^*(t)P_n(t)z_n(t,s;x), z_n(t,s;x) > +$$
$$\langle P_n(t)A_n(t)z_n(t,s;x), z_n(t,s;x)\rangle + \langle A_n^*(t)P_n(t)z_n(t,s;x), z_n(t,s;x)\rangle +$$
$$\sum_{i=1}^{m} \langle G_i^*(t)P_n(t)G_i(t)z_n(t,s;x), z_n(t,s;x)\rangle]dt+$$
$$\sum_{i=1}^{m} \langle P_n(t)G_i(t)z_n(t,s;x), z_n(t,s;x)\rangle\, dw_i(t)+$$
$$\sum_{i=1}^{m} \langle P_n(t)z_n(t,s;x), G_i(t)z_n(t,s;x)\rangle\, dw_i(t).$$

Astfel , integrând de la s la $s+\tau$ şi trecând la medie obţinem

$$E\langle P_n(s+\tau)z_n(s+\tau,s;x), z_n(s+\tau,s;x)\rangle - E\langle P_n(s)x,x\rangle =$$
$$= -E\int_s^{s+\tau} \|C(t)z_n(t,s;x)\|^2 + \langle K(t)S_n(t)z_n(t,s;x), S_n(t)z_n(t,s;x)\rangle\, dt$$

,

unde am notat $S_n(t) = K(t)^{-1}B^*(t)P_n(t)$. Trecând la limită pentru $n \to \infty$ in ultima egalitate şi aplicând Lema 1.4.8 şi Lema 3.7.7 avem

$$E\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;x), z(s+\tau,s;x)\rangle - E\langle P(s)x,x\rangle =$$

$$= -E\int_s^{s+\tau} \|C(t)z(t,s;x)\|^2 + \langle K(t)S(t)z(t,s;x), S(t)z(t,s;x)\rangle\, dt.$$

Într-adevăr, deoarece $P(t)$, $0 \le t \le s+\tau$ este soluţia de evoluţie unică a lui (3.7.4) cu condiţia finală in $s+\tau$, $P(s+\tau)$, deducem din Lema 3.7.7 că $P_n(t)$ converge in topologia tare la $P(t)$. Atunci este clar că $S_n(t)$ este tare convergent la $S(t)$, uniform in raport cu t pe $[s, s+\tau]$, şi din Lema 1.4.8 deducem $\lim_{n\to\infty} E\|S_n(t)z_n(t,s;x) - S(t)z(t,s;x)\|^2 = 0$ tot uniform in raport cu t. Dacă notăm $\xi_n = S_n(t)z_n(t,s;x)$ şi respectiv

$\xi = S(t)z(t,s;x)$ observăm că $\xi_n(t), \xi(t) \in L_t^2(U)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} E\left\|\xi_n(t)\right\|^2 = E\left\|\xi(t)\right\|^2$, uniform in raport cu t.

Astfel $\lim\limits_{n\to\infty} E(\langle K(t)\xi_n(t), \xi_n(t)\rangle - \langle K(t)\xi(t), \xi(t)\rangle) = 0$ uniform in raport cu t pe $[s, s+\tau]$. Analog se pot demonstra celelalte convergenţe necesare mai sus. De aici, avem $\langle Q(s)x, x\rangle = \langle P(s)x, x\rangle - E\left\langle P(s+\tau)z(s+\tau, s; x), z(s+\tau, s;\right.$ pentru toţi $s \geq 0$ şi x $\in H$.

Conform (3.7.12) şi deoarece $P(.)$ este mărginit pe $\mathbf{R}_+$ şi nenegativ deducem că există $r_3 > 0$ astfel incât

$$r_3\left\|x\right\|^2 \geq \langle P(s)x, x\rangle \geq \langle Q(s)x, x\rangle \geq r_2\left\|x\right\|^2 \tag{3.7.13}$$

pentru toţi $s \geq 0$ şi $x \in H$. Dacă luăm $\delta = r_2$ rezultă a).

Vom demonstra b). Folosind formula obţinută mai sus pentru Q şi (3.7.13), avem $\langle P(s)x, x\rangle - E\left\langle P(s+\tau)z(s+\tau, s; x), z(s+\tau, s; x)\right\rangle \geq r_2\left\|x\right\|^2 \geq \frac{r_2}{r_3}\langle P(s)x, x\rangle$ şi

$(1 - \frac{r_2}{r_3})\langle P(s)x, x\rangle \geq E\left\langle P(s+\tau)z(s+\tau, s; x), z(s+\tau, s; x)\right\rangle.$

Notând $q = (1 - \frac{r_2}{r_3}) < 1$, $v(s,x) = \langle P(s)x, x\rangle$ şi $g(s,x) = Ev(s+\tau, z(s+\tau, s; x))$, $s \in \mathbf{R}_+$, $x \in H$, putem scrie :

$$g(s,x) \leq qv(s,x) \tag{3.7.14}$$

pentru orice $s \in \mathbf{R}_+$, $x \in H$.

Vom demonstra

$$Eg(s, z(s,p,u)) = Ev(s+\tau, z(s+\tau, p; x)) \tag{3.7.15}$$

oricare ar fi $s \geq p \geq 0$ şi $u \in H$.

Fie $\xi \in L_s^2(H)$ o variabilă aleatoare simplă (ia numai un număr finit de valori). Atunci $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i} x_i$, unde $\{A_i\}_{i=1,\dots m}$, $A_i \in \mathcal{F}_s$ este o partiţie a lui Ω , χ_{A_i} este funcţia caracteristică a lui A_i şi $x_i \in H$.

Atunci

$$g(s,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}g(s,x_i).$$

Deoarece se ştie că soluţia de evoluţie $z(s+\tau,s;x)$ a ecuaţiei (3.7.7) depinde liniar de condiţiile iniţiale şi datorită faptului că $z(s+\tau,s;x)$ este $\mathcal{F}_s-$ independentă (Teorema 1.4.7) avem

$$E(\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;\xi),z(s+\tau,s;\xi)\rangle)=$$
$$E(\left\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}x_i),z(s+\tau,s;\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}x_i)\right\rangle)=$$
$$=E(\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;x_i),z(s+\tau,s;x_i)\rangle).$$

Deoarece $\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;x_i),z(s+\tau,s;x_i)\rangle$ este $\mathcal{F}_s-$ independent obţinem

$$E(\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;\xi),z(s+\tau,s;\xi)\rangle)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)g(s,x_i)=Eg(s,\xi).$$

În consecinţă,

$$Eg(s,\xi)=E(\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;\xi),z(s+\tau,s;\xi)\rangle) \tag{3.7.16}$$

Deoarece $z(s,p,u)\in L_s^2(H)$, pentru toţi $s\geq p\geq 0$ şi $u\in\ H$ atunci există un şir $\{\xi_n\}\subset L_s^2(H)$ de variabile aleatoare simple care converge lui $z(s,p,u)$ şi satisface (3.7.16). Astfel,

$$Eg(s,\xi_n)=E(\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;\xi_n),z(s+\tau,s;\xi_n)\rangle).$$

Este uşor de văzut că există constanta k astfel incât $E\left|g(s,\xi_n)-g(s,\xi)\right|\leq kE\left\|\xi_n-\xi\right\|^2$, k independentă de ξ_n. Trecând la limită pentru $n\to\infty$ in ultima egalitate avem

$$Eg(s,z(s,p,u))=E(\langle P(s+\tau)z(s+\tau,s;z(s,p,u)),z(s+\tau,s;z(s,p,u))\rangle)$$

Ţinând cont de unicitatea soluţiei de evoluţie a ecuaţiei *(3.7.7)* deducem

$$Eg(s, z(s, p, u)) = E(\langle P(s+\tau)z(s+\tau, p, u)), z(s+\tau, p, u))\rangle)$$

şi obţinem (3.7.15). Atunci deducem din (3.7.14)

$E[g(s, z(s, p; x))] \leq qEv(s, z(s, p; x))$ sau

$Ev(s+\tau, z(s+\tau, p; x)) \leq qEv(s, z(s, p; x))$

Din ultima inegalitate, Lema 1.4.9 şi (3.7.13) rezultă că există $\beta \geq 1$ şi $\alpha > 0$ $(\alpha = -\frac{\ln q}{\tau})$ astfel incât $E\left\|z(t, p; x)\right\|^2 \leq \beta e^{-\alpha(t-p)}\left\|x\right\|^2$ pentru toţi $t \geq p \geq 0$ şi $x \in H$. De aici se deduce că P este o soluţie de evoluţie stabilizantă. □

Corolarul următor este preluat din [**10**] (Corolarul 3.2 din [**10**]).

Corolarul 3.7.10. *(*[**10**]*)Dacă avem indeplinite toate ipotezele impuse familiilor de operatori A, B, C, G_i, K la inceputul acestui paragraf, iar Q este o soluţie nenegativă, stabilizantă şi mărginită a ecuaţiei Riccati (3.7.4) atunci orice altă soluţie $Q_2 \geq 0$, mărginită, a acesteia este maximală, adică $Q_2(t) \leq Q(t)$ oricare ar fi $t \geq 0$.*

Rezultatele următoare sunt versiunile din cazul infinit dimensional ale Propoziţiei 5 şi Teoremei 1 din [**48**].

Propoziţia 3.7.11. *Dacă au loc ipotezele teoremei de mai sus atunci ecuaţia Riccati (3.7.4) are cel mult o soluţie de evoluţie mărginită.*

Demonstraţie. Concluzia rezultă din corolarul şi teorema de mai sus. □

Teorema de mai jos este principalul rezultat al acestui paragraf.

Teorema 3.7.12. *Presupunem că ecuaţia* $\{A, B; G_i\}$ *este stabilizabilă şi sistemul* $\{A, C; G_i\}$ *este uniform observabil. atunci ecuaţia Riccati (3.7.4) are o unică soluţie de evoluţie* $P(t)$ *nenegativă şi mărginită pe* $\mathbf{R}_+$ *care este stabilizantă şi indeplineşte condiţia că există* $\delta > 0$ *astfel incât* $P(t) \geq \delta I$ *pentru toţi* $t \in [0, \infty)$.

Demonstraţie. Din Teorema 4.1 [**10**] rezultă că dacă ecuaţia $\{A, B; G_i\}$ este stabilizabilă atunci ecuaţia (*3.7.4*) are o soluţie de evoluţie mărginită pe $\mathbf{R}_+$. Din Teorema 3.7.9 şi propoziţia de mai sus deducem concluzia $\square$

8. Dihotomia exponenţială

În acest paragraf este introdus conceptul de dihotomie exponenţială uniformă pentru ecuaţii diferenţiale stocastice şi sunt date condiţii necesare şi suficiente pentru obţinerea acestei. Rezultatele obţinute reprezintă variante stocastice ale teoremelor de caracterizare a dihotomiei exponenţiale uniforme a ecuaţiilor de evoluţie deterministe din [**41**], [**36**], [**5**]. peste tot in acest paragraf se presupune că are loc ipoteza P_1 şi $G_i \in C_s(\mathbf{R}_+, L(H)), i = 1, ..., m$.

Fie $s \geq 0$ fixat, $t \geq s$, $y(t, s; x)$ soluţia de evoluţie ecuaţiei (1.4.1). În cele ce urmează considerăm un subspaţiu liniar şi inchis, H_1, al lui H. (Putem considera H_1 ca fiind inchiderea spaţiului liniar format din mulţimea vectorilor $x \in H$ cu proprietatea $\sup\limits_{t \geq s} E \|y(t, s; x)\|^2 < \infty$).

Fie $\widetilde{P_1}$ proiecţia lui H pe H_1 şi $\widetilde{P_2} = I - \widetilde{P_1}$ proiecţia lui H pe $H_2 = H_1^{\perp}$. Notăm $y_1(t, s; x) = y(t, s; \widetilde{P_1}x)$ şi respectiv $y_2(t, s; x) = y(t, s; \widetilde{P_2}x)$.

Definiţia 3.8.1. Spunem că y(t,s;x), soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1), este *uniform exponenţial dihotomică* in raport cu perechea de spaţii (H_1, H_2) dacă şi numai dacă există constantele N_1, N_2, $\gamma > 0$ astfel incât să avem

$$E(\|y_1(t, s; x)\|^2) \leq N_1 e^{-\gamma(t-\tau)} E(\|y_1(\tau, s; x)\|^2) \tag{3.8.1}$$

$$E(\|y_2(t, s; x)\|^2) \geq N_2 e^{\gamma(t-\tau)} E(\|y_2(\tau, s; x)\|^2) \tag{3.8.2}$$

oricare ar fi $x \in H$ *şi* $t \geq \tau \geq s$.

8.1. Dihotomia exponenţială uniformă a ecuaţiilor diferenţiale stocastice. O primă teoremă de caracterizare a dihotomiei exponenţiale şi care este o consecinţă directă a Definiţiei 3.8.1 şi a teoremei de reprezentare T.3.2.8 este enunţată mai jos:

Teorema 3.8.2. *Soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1),* $y(t, s; x)$*, este uniform exponenţial dihotomică dacă şi numai dacă există constantele* N_1, N_2, $\gamma > 0$ *astfel incât să avem*

$$\left\langle \widetilde{P_1} Q(t, s; I) \widetilde{P_1} x, x \right\rangle \leq N_1 e^{-\gamma(t-\tau)} \left\langle \widetilde{P_1} Q(\tau, s; I) \widetilde{P_1} x, x \right\rangle$$

$$\left\langle \widetilde{P_2} Q(t, s; I) \widetilde{P_2} x, x \right\rangle \geq N_2 e^{\gamma(t-\tau)} \left\langle \widetilde{P_2} Q(\tau, s; I) \widetilde{P_2} x, x \right\rangle$$

oricare ar fi $x \in H$ *şi* $t \geq \tau \geq s$ *unde* Q *este soluţia de evoluţie a ecuaţiei (3.2.10).*

Teorema următoare reprezintă varianta stocastică a rezultatelor obţinute in [**41**] şi dă condiţii necesare şi suficiente pentru ca soluţia de evoluţie a ecuaţiei (1.4.1) să fie uniform exponenţial dihotomică. În cele ce urmează presupunem că avem indeplinită ipoteza P_2 din subparagraful 4.2 al capitolului 1.

Teorema 3.8.3. *Presupunem ca avem indeplinite ipoteza P_2 (operatorul de evoluţie $U(t,s)$ este cu creștere exponenţială). Soluţia de evoluţie ecuaţiei (1.4.1) este uniform exponenţial dihotomică dacă și numai dacă există constantele pozitive M_1,M_2 și M_3 astfel incât*

$$\int_{\tau}^{\infty} E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 dt \leq M_1 E\left\|y_1(\tau,s;x)\right\|^2 \tag{3.8.3}$$

și

$$\int_{s}^{\tau} E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2 dt \leq M_2 E\left\|y_2(\tau,s;x)\right\|^2, \tag{3.8.4}$$

$$E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2 dt \leq M_3 E\left\|y_2(t+1,s;x)\right\|^2 \tag{3.8.5}$$

oricare ar fi $x \in H$ și $\tau \geq s \geq 0$.

Demonstraţie. a) Prima dată vom demonstra echivalenţa dintre (3.8.1) şi (3.8.3). Pentru a demonstra implicaţia "(3.8.1) ⇒ (3.8.3)" observăm că din (3.8.1) obţinem integrând

$$\int_{\tau}^{\infty} E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 dt \leq \int_{\tau}^{\infty} N_1 e^{-\gamma(t-\tau)} E(\left\|y_1(\tau,s;x)\right\|^2) dt \leq M_1 E(\left\|y_1(\tau,s;x)\right\|^2)$$

unde $M_1 = \frac{N_1}{\gamma}$. Mai ramâne de demonstrat reciproca.

Pasul 1. Vom demonstra că există constanta $K > 0$ astfel incât

$$E\|y_1(t,s;x)\|^2 \le \frac{K}{t-r+1} E\|y_1(r,s;x)\|^2 \tag{3.8.6}$$

oricare ar fi $0 \le s \le r \le t, x \in H$. Fie $x \in H$ şi $c = \int\limits_0^1 \frac{1}{f(u)} du$,unde functia $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, crescătoare este cea definită in Lema 1.4.9.

Cazul 1. $0 \le s \le s+1 \le r \le t$. Avem
$cE\|y_1(t,s;x)\|^2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{f(u)} E\|y_1(t,s;x)\|^2 du = \int\limits_{t-1}^{t} \frac{1}{f(t-\tau)} E\|y_1(t,s;x)\|^2 d\tau.$

Dacă $\tau \in [t-1, t]$ atunci, conform punctului a) al Lemei 1.4.9, avem

$$E\|y(t,\tau;\xi)\|^2 \le f(t-\tau) E\|\xi\|^2 \tag{3.8.7}$$

oricare ar fi $\xi \in L^2_\tau(H), t \ge s \ge 0$.

Deoarece $y(\tau,s;x) \in L^2_\tau(H)$ atunci deducem conform ultimei inegalităţi că $E\|y(t,s;x)\|^2 = E\|y(t,\tau;y(\tau,s;x)\|^2 \le f(t-\tau)E\|y(\tau,s;x)\|^2$ oricare ar fi $x \in H$.

Deci, inlocuind x cu $P_1 x$ in inegalitatea de mai sus avem $E\|y_1(t,s;x)\|^2 \le f(t-\tau)E\|y_1(\tau,s;x)\|^2$ oricare ar fi $t \ge \tau \ge t-1$. Astfel,

$cE\|y_1(t,s;x)\|^2 \le \int\limits_{t-1}^{t} \frac{1}{f(t-\tau)} E\|y_1(t,s;x)\|^2 d\tau \le \int\limits_{t-1}^{t} E\|y_1(\tau,s;x)\|^2 d\tau.$

Avem situaţiile următoare :

a) $s \le r \le t-1 \le t$ ($t-1 \ge s$, conform ipotezei acestui caz) şi este clar că $\int\limits_{t-1}^{t} E\|y_1(\tau,s;x)\|^2 d\tau \le \int\limits_r^\infty E\|y_1(\tau,s;x)\|^2 d\tau$. Conform (3.8.1), obţinem

$$cE\|y_1(t,s;x)\|^2 \le M_1 E\|y_1(r,s;x)\|^2$$

b) $s \le t-1 < r \le t$. Atunci aplicăm (3.8.7) şi deoarece $t-r \le 1$avem

$$E\|y_1(t,s;x)\|^2 \le f(t-r)E\|y_1(r,s;x)\|^2 \le f(1)E\|y_1(r,s;x)\|^2 .$$

(De fapt in aceste două subcazuri este discutată doar poziţia lui r faţă de $t-1$ şi t in condiţiile in care $t \ge s+1$). Dacă luăm $N =$

$max\{\frac{M_1}{c}, f(1)\}$ atunci obţinem

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq NE\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2 \tag{3.8.8}$$

oricare ar fi $0 \leq s \leq s+1 \leq r \leq t, x \in H$.

Înlocuind in (3.8.8) pe r cu τ şi integrând de la r la $t, t \geq r \geq s+1$ in raport cu τ, avem

$$\int\limits_r^t E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 d\tau \leq N\int\limits_r^t E\left\|y_1(\tau,s;x)\right\|^2 d\tau \leq$$
$$\leq N\int\limits_r^\infty E\left\|y_1(\tau,s;x)\right\|^2 d\tau \leq NM_1E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$$

sau

$$(t-r)E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq NM_1E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$$

oricare ar fi $0 \leq s \leq s+1 \leq r \leq t, x \in H$. Adunând ultima inegalitate la (3.8.8) obţinem:

$$(t-r+1)E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq N(M_1+1)E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$$

şi

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq \frac{N(M_1+1)}{(t-r+1)}E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2 \tag{3.8.9}$$

oricare ar fi $0 \leq s \leq s+1 \leq r \leq t, x \in H$.

Dacă avem $0 \leq s \leq r \leq t$ şi nu suntem in situaţia de mai sus atunci avem cazurile 1 sau 2 de mai jos.

Cazul 2. Dacă $0 \leq s \leq r \leq s+1 \leq t$ atunci aplicăm (3.8.9) şi (3.8.7) şi avem

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq \frac{N(M_1+1)}{(t-(s+1)+1)} E\left\|y_1(s+1,s;x)\right\|^2 \leq$$
$$\leq \frac{N(M_1+1)}{t-s} f(s+1-r) E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2.$$

Deci $E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq \frac{N(M_1+1)}{t-s} f(1) E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$. Deoarece $2(t-s) \geq t-r+1$ (căci $t-s \geq t-r$ şi $t-s \geq 1$), avem

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq \frac{2N(M_1+1)}{t-r+1} f(1) E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2.$$

Cazul 3. Dacă $0 \leq s \leq r \leq t \leq s+1$ atunci aplicăm (3.8.7) şi avem

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq f(t-r) E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2 \leq \frac{2f(1)}{t-r+1} E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$$

, deoarece $2 \geq t-r+1$.

Dacă luăm $K = max\{2f(1), 2N(M_1+1)f(1), N(M_1+1)\}$ atunci obţinem

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq \frac{K}{t-r+1} E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$$

$0 \leq s \leq r \leq t, x \in H$.

Pasul 2. Alegem $\rho > 0$ astfel incât $\frac{K}{(\rho+1)} = \frac{1}{2}$. Fie $t \geq r \geq s$. Atunci există $n \in \mathbf{N}$ şi $r_0 \in \mathbf{R}_+$ astfel incât $t-r = n\rho + r_0$, $0 \leq r_0 < \rho$. Se poate demonstra prin inducţie după $n \in \mathbf{N}$ că dacă $t-r = n\rho + r_0, 0 \leq r_0 < \rho$ atunci

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq (\frac{1}{2})^n K E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$$

Într-adevăr dacă $n = 0$ atunci aplicăm (3.8.6) şi avem

$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \leq \frac{K}{r_0+1} E\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2 \leq KE\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$ şi obţinem concluzia. Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n \geq 0$ şi vom arăta că este adevărată pentru $n+1$. Avem $E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 = E\left\|y_1(r+(n+1)\rho+r_0,s;x)\right\|^2 \leq$

$(\frac{1}{2})E\left\|y_1(r+n\rho+r_0,s;x)\right\|^2 \le (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^n KE\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$, conform (3.8.6) şi ipotezei de inducţie.şi demonstraţia este completă. Astfel,

$$E\left\|y_1(t,s;x)\right\|^2 \le (\frac{1}{2})^{\frac{t-r}{\rho}}(\frac{1}{2})^{\frac{-r_0}{\rho}}KE\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2 \le$$
$$2(\frac{1}{2})^{\frac{t-r}{\rho}}KE\left\|y_1(r,s;x)\right\|^2$$

Dacă luăm $\gamma = -\frac{1}{\rho}ln\frac{1}{2}$ şi $N_1 = 2K$ şi rezultă concluzia.

b) Acum vom demonstra echivalenţa dintre (3.8.2) şi (3.8.4), (3.8.5). Implicaţia "(3.8.2) $\Rightarrow$ (3.8.4), (3.8.5)" este evidentă. Procedând la fel ca la punctul a) vom demonstra reciproca.

Cazul 1 Dacă $0 \le s \le s+1 \le r \le t$ atunci avem

$$E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \int_0^1 \frac{1}{f(u)}du \le \int_{r-1}^{r} \frac{1}{f(r-p)}E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 dp$$

şi deoarece pentru orice $r-1 \le p \le r$ are loc inegalitatea $E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \le f(r-p)E\left\|y_2(p,s;x)\right\|^2$, obţinem

$cE\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \le \int_{r-1}^{r} E\left\|y_2(p,s;x)\right\|^2 dr \le \int_{s}^{t} E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 dr$. Aplicăm (3.8.4) şi obţinem

$$cE\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \le M_2E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2. \tag{3.8.10}$$

Cazul 2. Dacă $0 \le s \le r \le s+1$ şi $r+1 \le t$ atunci putem folosi (3.8.5) şi ultima inegalitate şi deducem că

(3.8.11)
$$E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \le M_3E\left\|y_2(r+1,s;x)\right\|^2 \le M_3\frac{M_2}{c}E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2$$

oricare ar fi $x \in H$.

Cazul 3. Dacă $0 \leq s \leq r \leq s+1$ şi $r+1 > t$ atunci folosim (3.8.5) şi Lema 1.4.9 şi obţinem:

(3.8.12)

$$E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \leq M_3 E\left\|y_2(r+1,s;x)\right\|^2 \leq M_3 f(1) E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2$$

oricare ar fi $x \in H$.

Din (3.8.10), (3.8.11) şi (3.8.12) deducem că există o constantă pozitivă P astfel incât :

$$E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \leq PE\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2$$

oricare ar fi $t \geq r \geq s \geq 0$ şi $x \in H$. Inlocuind pe t cu τ, in ultima inegalitate şi integrând de la r la t in raport cu τ obţinem :

$$(t-r)E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \leq P\int_r^t E\left\|y_2(\tau,s;x)\right\|^2 d\tau \leq M_2 PE\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2$$

Adunând ultimele două relaţii avem

$$(t-r+1)E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \leq (M_2+1)PE\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2$$

oricare ar fi $t \geq r \geq s \geq 0$ şi $x \in H$.

Deci, $C(t-r+1)E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \leq E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2$,unde $C = \frac{1}{(M_2+1)P}$.

Fie $\rho > 0$ astfel incât $(\rho+1)C = \frac{1}{2}$ şi fie n un număr natural care satisface relaţia $t-r = n\rho + r_1$, $r_1 \in [0,\rho]$. Folosind inducţia se poate deduce exact ca la punctul a) că $E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2 \geq (\frac{1}{2})^n \frac{1}{(r_1+1)C} E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2 \geq (\frac{1}{2})^n \frac{1}{C} E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2$ şi deci există constantele pozitiveN_2 şi γ astfel incât $E\left\|y_2(t,s;x)\right\|^2 \geq N_2 e^{\gamma(t-r)} E\left\|y_2(r,s;x)\right\|^2$ oricare ar fi $t \geq r \geq s$ şi $x \in H$. □

8.2. Dihotomia exponenţială şi funcţiile Lyapunov.

Definiţia 3.8.4. Funcţia $V : \mathbf{R}_+ \times H \to \mathbf{R}$ se numeşte *funcţie Lyapunov pentru soluţia medie* a ecuaţiei (1.4.1) dacă satisface următoarele condiţii:

1) există $k > 0$ astfel incât $|V(t,x)| \leq kE(\|y(t,s;x)\|^2)$ pentru orice $x \in H, t \geq 0$.

2) $\int\limits_\tau^t E(\|y(r,s;x)\|^2)dr \leq \ V(\tau,x) - V(t,x)$ pentru orice $0 \leq \tau \leq t$ şi $x \in H$.

Teorema 3.8.5. *Presupunem că operatorul $Q(t,s;I)$ este invariant faţă de spaţiul H_1 oricare ar fi $t \geq s \geq 0$. Dacă soluţia de evoluţie $y(t,s;x)$ a ecuatiei (1.4.1) este uniform exponenţial dihotomică atunci există o funcţie Lyapunov V astfel incât:*

i) $V(t,x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in H_1$, $t \geq s$,

ii) $V(t,x) \leq 0$ oricare ar fi $x \in H_2$, $t \geq s$.

Demonstraţie. Fie

$$V(t,x) = 2(\int\limits_t^\infty E(\|y_1(r,s;x)\|^2)dr - \int\limits_s^t E(\|y_2(r,s;x)\|^2)dr), x \in H.$$

Vom demonstra că V este o funcţie Lyapunov in sensul definiţiei de mai sus. Deoarece

$$V(\tau,x) - V(t,x) = 2(\int\limits_\tau^t E(\|y_1(r,s;x)\|^2)dr + \int\limits_\tau^t E(\|y_2(r,s;x)\|^2)dr) =$$

$$= 2\int\limits_\tau^t E(\|y_1(r,s;x)\|^2)dr + E(\|y_2(r,s;x)\|^2)dr \geq \int\limits_\tau^t E(\|y(r,s;x)\|^2)dr$$

deducem că avem indeplită condiţia 2) din definiţie.

În ceea ce priveşte prima condiţie observăm că

$$|V(t,x)| \leq 2(\int\limits_t^\infty E(\|y_1(r,s;x)\|^2)dr + \int\limits_s^t E(\|y_2(r,s;x)\|^2)dr)$$

şi aplicând Teorema 3.8.3 ((3.8.3) şi (3.8.4)) avem

$$|V(t,x)| \leq 2(M_1 E\,\|y_1(t,s;x)\|^2 + M_2 E\,\|y_2(t,s;x)\|^2),$$

sau ,folosind teorema de reprezentare T. 3.2.8,

$$|V(t,x)| \leq 2max\{M_1, M_2\}(\langle P_1Q(t,s;I)P_1x,x\rangle + \langle P_2Q(t,s;I)P_2x,x\rangle)$$

Astfel obţinem

$$|V(t,x)| \leq 2max\{M_1, M_2\} \langle Q(t,s;I)x,x\rangle = kE \|y(t,s;x)\|^2 ,$$

unde $k = 2max\{M_1, M_2\}$. Am folosit faptul că dacă $Q(t,s;I)$ este autoadjunct şi invariant faţă de spaţiul H_1 atunci $P_1Q(t,s;I)P_1 = P_1Q(t,s;I) = Q(t,s;I)P_1$ şi $P_1Q(t,s;I)P_1 + P_2Q(t,s;I)P_2 = Q(t,s;I)$.

Acum vom demonstra că avem indeplinite condiţiile i) şi ii) din teoremă.

Dacă $x \in H_1$ atunci $E(\|y_2(r,s;x)\|^2) = E(\|y(r,s;0)\|^2) = 0$ şi $V(t,x) = 2(\int\limits_t^\infty E(\|y_1(r,s;x)\|^2)dr \geq 0$ oricare ar fi $x \in H_1$ şi $t \geq s$. În mod analog se demonstrează că $V(t,x) = -2\int\limits_s^t E(\|y_2(r,s;x)\|^2)dr \leq 0$ dacă $x \in H_2$ şi $t \geq s$. $\square$

În final vom enunţa şi o reciprocă a acestei teoreme.

Teorema 3.8.6. *Dacă există o funcţie Lyapunov V astfel incât să fie indeplinite condiţiile i) şi ii) din teorema de mai sus şi dacă $y_2(r,s;x)$ satisface condiţia (3.8.5) atunci $y(r,s;x)$ este uniform exponenţial dihotomică.*

Demonstraţie. Din i) şi proprietatea 2) a funcţiei Lyapunov rezultă că $\int\limits_\tau^t E(\|y_1(r,s;x)\|^2)dr \leq\ V(\tau, P_1x)$ oricare ar fi $\tau \geq s$. Conform 1) din Definiţia 3.8.4 şi făcând $t \to\ \infty$ deducem că există $k > 0$ astfel incât

$$\int\limits_\tau^\infty E(\|y_1(r,s;x)\|^2)dr \leq kE(\|y_1(\tau,s;x)\|^2).$$

Din proprietăţile 2) şi 1) ale funcţiei Lyapunov şi ii), rezultă succesiv $\int_{\tau}^{t} E(\|y_2(r,s;x)\|^2)dr \leq -\ V(t,P_2x) \leq kE(\|y_1(t,s;x)\|^2)$. Deoarece avem indeplinite ipotezele Teoremei 3.8.3, rezultă concluzia. □

Teorema de mai jos reprezintă tot o reciproca a Teoremei 3.8.5 dar in care este eliminată condiţia (3.8.5).

Teorema 3.8.7. *Presupunem că sunt indeplinite condiţiile de aplicare ale Lemei 1.4.9. Dacă există o funcţie Lyapunov V astfel incât condiţia 1) din Definiţia 3.8.4 să fie indeplinită pentru un k astfel incât* $0 < k < 1$ *şi dacă au loc condiţiile i) şi ii) din Teorema 3.8.5 atunci soluţia de evoluţie $y(t,s;x)$ este uniform exponenţial dihotomică.*

Demonstraţie. Este uşor de văzut conform demonstraţiei de mai sus că au loc relaţiile (3.8.3) şi (3.8.4) din Teorema 3.8.3. Vom demonstra (3.8.5). Dacă ţinem cont de condiţia ii) din Teorema 3.8.5 atunci deducem că

$$\int_{t}^{t+1} E(\|y_2(r,s;x)\|^2)dr \leq kE(\|y_2(t+1,s;x)\|^2)$$

oricare ar fi $x \in H$ şi $t \geq s$. Deci aplicând teorema de medie putem spune că există $\tau \in [t, t+1]$ astfel incât

$E(\|y_2(\tau,s;x)\|^2) \leq kE(\|y_2(t+1,s;x)\|^2) \leq E(\|y_2(t+1,s;x)\|^2)$

Notăm cu t_1 cel mai mic $\tau \in [t, t+1]$ care satisface condiţia $E(\|y_2(\tau,s;x)\|^2) \leq E(\|y_2(t+1,s;x)\|^2)$. Dacă $t_1 = t$ atunci rezultă concluzia, altfel mai aplicăm o dată raţionamentul de mai sus şi deducem că există $t_2 \in [t_1 - 1, t_1]$ astfel incât

$E(\|y_2(t_2,s;x)\|^2) \leq kE(\|y_2(t_1,s;x)\|^2) \leq E(\|y_2(t+1,s;x)\|^2)$.

Dacă $t_2 \geq t$ atunci, pentru a nu contrazice minimalitatea lui t_1 avem $t_2 = t_1$, dar din ultima inegalitate rezultă că $E(\|y_2(t_1,s;x)\|^2) = 0$ şi aplicând in continuare (3.8.4) deducem ca $E(\|y_2(u,s;x)\|^2) = 0$ oricare ar fi $s \leq u \leq t_1, x \in H$. Cum $t \leq t_1$ rezultă

$$E\,\|y_2(t,s;x)\|^2 = 0$$

şi rezultă (3.8.5).

Dacă $t_2 < \ t$ aplicăm in continuare Lema 1.4.9 şi avem

$$E(\|y_2(t,s;x)\|^2) \leq f(t-t_2)E(\|y_2(t_2,s;x)\|^2) \leq f(2)kE(\|y_2(t+1,s;x)\|^2)$$

Demonstraţia este completă . □

9. Comentarii bibliografice

În acest capitol este dată o teoremă de reprezentare a mediei pătratice a soluţiilor de evoluţie ale ecuaţiilor diferenţiale liniare stocastice in cazul spaţiilor infinit dimensionale şi ideea de a obţine o astfel de reprezentare işi are originea in [**47**] , [**48**] şi [**11**].

Reprezentarea amintită mai sus a permis obţinerea de caracterizări deterministe ale stabilităţii exponenţiale uniforme şi observabilităţii uniforme, obţinând generalizări ale rezultatelor din [**47**] şi [**48**].

De asemenea, au fost date caracterizări ale stabilităţii exponenţiale uniforme ale sistemelor uniform observabile cu ajutorul ecuaţiilor Lyapunov. Aceste rezultate au fost prezentate la conferinţa "19^{th} International Conference on Operator Theory", Timişoara, 2002.

G.Da Prato şi I. Ichikawa au demonstrat in [**10**] că dacă ecuaţia cu control $\{A, B; G_i\}$ este stabilizabilă (Definiţia 3.7.2) şi sistemul $\{A, C; G_i\}$ este detectabil (Definiţia 3.7.1) atunci ecuaţia Riccati (3.7.4) asociată problemei controlului liniar pătratic are o soluţie unică şi mărginită pe R_+ care este stabilizantă pentru (1.4.1). Tot in acest capitol am demonstrat că in condiţii de observabilitate uniformă şi stabilizabilitate a ecuaţiei cu control, ecuaţia Riccati asociată problemei controlului liniar pătratic are o soluţie unică, uniform pozitivă şi mărginită pe $\mathbf{R}_+$ care este stabilizantă pentru sistemul considerat (pentru cazul finit dimensional se poate vedea lucrarea [**48**]).

Rezultatul din această lucrare este diferit de cel obţinut de G.Da Prato şi I. Ichikawa, datorită rezultatelor obţinute de T.Morozan in [**47**] şi contra-exemplului din [**65**], care demonstrează că implicaţia controlabilitatea uniformă implică stabilizabilitate este falsă in cazul stocastic (spre deosebire de cazul determinist unde acest lucru are loc ([**39**], [**59**], [**9**])). În finalul acestui capitol este introdusă noţiunea de dihotomie exponenţială pentru ecuaţii diferenţiale stocastice şi sunt obţinute caracterizări ale acesteia. Aceste caracterizări reprezintă variante stocastice ale unor rezultate similare din cazul determinist, rezultate ce apar in lucrările [**41**], [**36**], [**42**], [**5**] .

Bibliografie

[1] N.I. Ahiezer, I.M.Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert spaces*, Moskow-Leningrad (1950)(English trans.,1962)

[2] W. Averson, *An invitation to C^*-algebra*, Springer Verlag, New-York, 1976.

[3] V. Barbu, D. Tiba, *Boundary controllability of the coincidence set in the obstacle problem*, SIAM J. Control and Optim., 25,1991.

[4] V. Barbu, *Semigrupuri de contracţii neliniare in spaţii Banach*, Ed. Acad.R.S.R, Bucureşti , 1984.

[5] C. Buşe, *Comportări asimptotice ale proceselor evolutive* , Sedona ,Timişoara, 1998.

[6] G. Ciucu, C. Tudor, *Teoria probabilităţilor și aplicaţii*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucuresti, 1983.

[7] C. Crăciun, *Analiză reală*, Editura Universităţii Bucureşti, Bucureşti, 1988.

[8] R. F. Curtain, P. L.Falb, *Ito's lemma in infinite dimensions* , Journal of Mathematical Analysis And Application 31, pag. 434-448(1970)

[9] R. Curtain, J.Pritchard, *Infinite dimensional linear systems theory,* Springer Verlag, Berlin, 1978.

[10] G. Da.Prato, A.Ichikawa, *Quadratic control for linear time-varying systems* , SIAM.J.Control şi Optimization, vol 28, No 2, 1990, pag. 359-381.

[11] G. Da.Prato, A.Ichikawa, *Lyapunov equations for time-varying linear systems* , Systems and Control Letters 9(1987), pag. 165-172.

[12] G. Da.Prato,J.Zabczyc, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, University Press Cambridge, 1992.

[13] A. Dorogovtyev, *Periodic and stationary solutions of deterministic and stochastic dynamic systems in Banach spaces* (in limba rusă), Kiev, 1992.

[14] R. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory,* Academic Press, New York and London ,1972.

[15] V. Drăgan, A. Halanay, *Stabilizarea sistemelor liniare*, Edit. A.L.L., 1994.

[16] V. Drăgan, T. Morozan, *Optimal stabilizing compensator for linear systems with state -dependent noise*, Stochastic Analysis and Appl. 4(1986), pag 557-572.

[17] A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and applications*, vol.1, Academic Press, 1975.

[18] M. D. Fragoso, O. L. Costa, C. E. de Souza, *A new approach to linearly perturbed Riccati Equations arising in stochastic control*, Appl. Math. Optim., 37, pag. 99-126, 1998.

[19] T. Gard, *Introduction to stochastic differential equations*, Pure and applied Mathematics, Marcel Decker, Inc. New-York, 1987.

[20] D. Gaşpar, *Analiză matematică*, Editura Facla,Timişoara, 1981.

[21] I. Gelfand, H.Vilenkin, *Funcţii generalizate-Aplicaţii ale analizei armonice*, Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, (romanian trans.), Bucuresti, 1985.

[22] A. Germani, L. Jetto, M, Piccioni, *Galerkin approximations for optimal linear filtering of infinite-dimensional linear systems,* SIAM J. Control and Optim. 26(1988), pag. 1287-1305.

[23] I. Gohberg, S.Goldberg, *Basic operator theory*, Birkhausen, 1981.

[24] W. Grecksch, C.Tudor, *Stochastic Evolution equations,* . A Hilbert Space Approach Math. Res. Vol 75, Acad. Verlag, 1995.

[25] A. Halanay, T. Morozan, *Stabilization by linear feedback of linear discrete stochastic systems*, Rev.Roum Math. Pures Appl., tome xxiiii,nr 4(1978), pag. 561-571.

[26] A. Halanay, V. Ionescu, *Properties of some global solutions to the discrete time Riccati equation associated to a contracting input-output operator*, Journal of Difference Equations and Applications, vol 1,1995 pag 61-71.

[27] U. G. Haussmann, *Stability of linear systems with control dependent noise*, SIAM J. Control, vol 11,2(1973), pag.382-395.

[28] D. Hinrichsen, A. Ilchmann, A.J. Pritchard, *Robustness of stability of time-varying linear systems*, J. Diff. Eqs, 32(1989), pag. 219-250.

[29] A. Ichikawa , *Equivalence of L_p stability and exponential stability for a class of nonlinear semigroups*, Nonlinear Anal.T.M.A. 8(1984), pag. 805-815.

[30] A. Ichikawa , *Dynamic programming approach to stochastic evolution equations*, SIAM.J.Control and Optimization, vol 17, No 1, 1979, pag.152-173.

[31] A. Ichikawa , *Filtering and control of stochastic differential equations with unbounded coefficients*, Stochastic Analysis and Applications , 4(2), 1986, pag.187-212.

[32] V. Ionescu, *Teoria sistemelor de reglare automată*, Edit. A.L.L.,1992.

[33] V.I. Istratescu, *Introducere in teoria operatorilor*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucuresti, 1975.

[34] R.E. Kalman, *Contributions to theory of optimal control*, Bull.Soc. Math. Mexicana, 5(1960), pag.102-119.

[35] C. S. Kubrusly, *Mean square stability for discrete bounded linear systems in Hilbert space*, SIAM J. Control and Optimization, vol 23, No 1,1985.

[36] D.R. Laţcu, M.Megan, *Exponenţial dichotomy of evolution operators in Banach spaces*, Int. Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel, vol. 107(1992), 47-52.

[37] J. L. Lions, *Controlabilité exacte de systems distribues*, vol I, H.U.M, R.M.A Collection, nr. 8, Paris, 1988.

[38] X. Mao, *Exponential stability of stochastic differential equations*, Pure and Applied Mathematics, New-York,1994.

[39] M. Megan, *Propriétés qualitatives des systèmes linéaires contrôlés dans les espaces de dimension infinie*, Monografii Matematice, Univ. din Timişoara, 32(1988).

[40] M. Megan, C. Buşe, *On uniform exponential dichotomy of observable evolution operators,* Rendiconti Sem. Math. Univ. Pol. Torino, vol. *50(2)(1990), 183-194.*

[41] M. Megan ,C.Buse , *Dichotomy and Lyapunov functions in Banach spaces*, Universitatea din Timişoara, S.T.S. 59(1992).

[42] M. Megan ,C.Buşe , *Dichotomies and Liapunov functions in Banach spaces* , Bull.Math. Soc. Sc. Math.tom 37(1993), nr. 3-4, pag.103-113..

[43] M. Megan, P.Preda, *Conditions for exponential stability of difference equations in Banach spaces*, Analele Univ. din Timişoara, vol. xxviii, fasc. 1 (1990) 67-73.

[44] M. Megan, P. Preda ,*A criterion for the exponential dichotomy of linear discrete time systems in Banach spaces*, Rendiconti dell Seminario dell Universita di Cagliani, fasc 1, vol. 59, (1989), 53-61.

[45] M. Megan, P. Preda, *On exponential dichotomy of linear discrete time systems in Banach spaces* , STS, 47(1988),1-11, Univ .din Timişoara,1988.

[46] M. Megan, P. Preda, *Criteria for the exponential dichotomy of difference equations*, Analele Univ. din Timişoara, vol. xxvi, fasc.1(1990), 16-22.

[47] T. Morozan, *On the Riccati equations of stochastic control*, Int.Series of Numerical Mathematics, vol. 107,1992, Birkhauser Verlag Basel.

[48] T. Morozan, *Stochastic uniform observability and Riccati equations of stochastic control*, Rev.Roumaine Math. Pures Appl., 38(1993), 9, pag. 771-481.

[49] T. Morozan, *Stability and Control for Linear Discrete-time systems with Markov Perturbations*, Rev.Roumaine Math. Pures Appl., 40(1995), 5-6, pag. 471-494.

[50] T. Morozan, *Discrete time Riccati equations connected with Quadratic control for linear systems with independent random perturbations*, Rev.Roumaine Math. Pures Appl., 37(1992), 3, pag. 233-246.

[51] T. Morozan, *Input output operators and parametrized Riccati equations for time-varying stochastic differential equations*, Preprint Series Institute Math. Roum. Academy, 37(1995).

[52] T. Morozan, *Parametrized Riccati equations associated with input-output operators for discrete-time systems with state-dependent noise*, Stochastic Analysis and Applications, 16(5), pag. 915-931, 1998.

[53] T. Morozan, *Stochastic stability and control for discrete-time systems with jump Markov disturbances*, Rev.Roumaine Math. Pures Appl., tome xxiv, no. 1, 1979, pag. 111-127.

[54] T. Morozan, *Dual linear quadratic problem for linear control systems with jump Markov perturbations*, Rev.Roumaine Math. Pures Appl., 41,1996,5-6, pag. 363-377.

[55] A. Pazy , *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer- Verlag, Berlin, New - York, 1983.

[56] U. M. Popov, *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, Edit. Acad. Române, 1966.

[57] P.Preda, M.Megan, On *exponential dichotomy in Banach spaces, Bull. Austral. Math. Soc. 23(1981), 293-306.*

[58] P.Preda, M.Megan, E*xponential dichotomy of evolutionary processes in Banach spaces,* Cehosl.Math. Journal 35(110)(1985), 312-333.

[59] A. J. Pritchard, J.Zabczyc, *Stability and stabilizability of infinite dimensional systems*, SIAM Review, vol 23, no 1, 1981.

[60] C. Tudor, *Curs de teoria probabilitatilor*, Editura Universitatii Bucuresti, Bucuresti, 1988.

[61] C. Tudor, *Exponential stability and limit theorems for affine Ito equations*, Rev.Roumaine Math. Pures Appl.,38(1993),2, pag. 165-183.

[62] C. Tudor, *Optimal control for an infinite -dimensional periodic problem under white noise perturbations*, SIAM J. Control and Optimization, vol 28, 2(1990), pag 253-264.

[63] C. Tudor, *Procesos Estocasticos*, Soc. Mat. Mexicana. Aportaciones Matematicas, 1994.

[64] V. Ungureanu, *Exponential dichotomy of stochastic differential equations*, Analele Universităţii din Timişoara, Seria Matematică-Informatică, vol xxvii, fasc.1(1999), pag. 149-158.

[65] V. Ungureanu, *A Counter example for the implication "uniform controllability implies stabilizability" in the stochastic case*, "Seminar on Mathematical Analysis and Applications in control Theory", Timişoara, no. 118, 2000.

[66] V. Ungureanu, *Uniform exponential stability for linear discrete time systems with stochastic perturbations*, Analele Universităţii din Craiova, Seria Matematică-Informatică, vol xxviii, 2001, pag. 194-204.

[67] V. Ungureanu, *Uniform exponential stability and uniform observability for time-varying linear stochastic systems*, comunicare la conferinţa " 19th International Conference on Operator Theory", Timişoara, 27 iunie-2 iulie, 2002.

[68] V. Ungureanu, *Riccati equation of stochastic control and stochastic and stochastic uniform observability in infinite dimensions*, "Analysis and Optimization of Differential Systems", Kluwer Academic Publishers, 2003.

[69] V. Ungureanu, *On uniform observability of linear discrete-time systems*, comunicare la conferinţa ICAM, Baia Mare, 10-13 octombrie, 2002.

[70] V. Ungureanu, *The discrete-time Riccati equation connected with observability and quadratic control for linear systems with independent random perturbations*, trimisă spre publicare la Indian Journal of Applied mathematics.

[71] V. Ungureanu, *Uniform exponential stability for linear discrete time systems with stochastic perturbations*, acceptată pentru publicare in Bollettino U.M.I, seria B.

[72] V.Ungureanu, On *uniform observability for time-varying linear stochastic systems in Hilbert spaces, Proceedings of the National Conference on Mathematical Analysis and Applications,* Analele Universităţii din Timişoara, Seria Matematică-Informatică, vol xxxviii, fasc.3(2000), pag. 457-470.

[73] V.Ungureanu, On *uniform exponential stability of uniform observable time-varying linear stochastic differential equations,* Seminar on Mathematical Analysis and Applications in control Theory", Timişoara, no. 134(2002), 1-15.

[74] J. Yong, A. Arapostathis, *Stabilization of discrete-time linear systems with a time delay in the feedback loop*, Int. J. Control, vol 48, 4(1988), pag. 383-394..

[75] J. Zabczyk, *Stochastic control of discrete-time systems*, Control Theory and Topics in Funct.Analysis, IAEA, Vienna, (1976).

[76] J. Zabczyk, *On optimal stochastic control of discrete-time systems in Hilbert space*, SIAM J.Control, vol 13, 6(1974), pag. 1217-1234.

[77] J. Zabczyk, *Remarks on the control of discrete-time distributed parameter systems* , SIAM J.Control, vol 12, 4(1974), pag. 721-735.

[78] J. Zabczyk, *Mathematical control theory: An introduction,* Birkhauser, 1992.

[79] W. M. Wonham, *Random differential equations in control theory*, Probabilistic methods in Applied Math., vol 2,1970.

[80] W. M. Wonham, *On a matrix Riccati equation of stochastic control*, SIAM J. Control and Optim. 6(1968), pag 681-697.