STUDIUL MISCARII DE VIBRATIE A ELEMENTELOR STRUCTURALE SUB FORMA DE ARC

STUDY OF THE VIBRATION MOVEMENT OF THE STRUCTURAL ELEMENTS IN ARCH FORM

Minodora Maria PASĂRE, Associate Dr Eng., *„Constantin Brâncuşi" University*
Aurora-Cătălina IANĂSI, assist dr.eng., *„Constantin Brâncuşi" University*
minodora_pasare@yahoo.com

Minodora Maria PASĂRE, Associate Dr. Eng., *„Constantin Brâncuşi" University, Tg-Jiu*
Aurora-Cătălina IANĂSI, assist dr.eng., *„Constantin Brâncuşi" University, Tg-Jiu*
minodora_pasare@yahoo.com

REZUMAT: *Lucrarea de față urmăreşte rezolvarea teoretică a problemei stabilității dinamice a elementelor structurale in formă de arc. Aceste elemente structurale prezintă o importanță deosebită deoarece ele sunt utilizate in industria minieră, industria construcțiilor şi industria constructoare de maşini unde apar frecvent aceste solicitări dinamice.*

CUVINTE CHEIE: miscare, vibrație, arc

ABSTRACT: *This paper seeks the theoretical problem of dynamic stability of arc-shaped structural elements. These structural elements are particularly important because they are used in mining, construction and machines engineering industry where appear frequently dynamic loads.*

KEYWORDS: movement, vibration, arch

1. INTRODUCERE

Legile ce guvernează fenomenul stabilității elementelor structurale, solicitate de sarcini dinamice, diferă calitativ de cele stabilite pentru cazul solicitărilor statice, fapt ce justifică, în mare măsură, distrugerea unor elemente de rezistență, prin pierderea stabilității lor, ca urmare a faptului că proiectarea acestora s-a făcut pe baza formulelor de dimensionare valabile numai pentru acțiunea statică a sarcinilor, în timp ce în exploatare sarcinile aplicate au o secțiune dinamică.

2. STABILIREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIŞCĂRII DE VIBRAȚIE

Ecuațiile de bază pentru studiul arcelor pot fi stabilite considerând bara curbă AB din figura 1a, uşor încovoiată în planul curbei, având raza inițială de curbură egală cu R,

1. INTRODUCTION

Laws governing the phenomena of stability for structural elements, required by dynamic charges differ from the qualitative point of view from the ones established regarding static demands, fact justifying – to a great extent- the destruction of some resistance elements, by losing their stability, as a result of the fact that their designing have been made based on formulas of valid dimensioning only for the static action of charges, meanwhile in exploitation, charges applied have a dynamic section.

2. STABILITY OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE VIBRATION MOVEMENTS

The basic equations for the study of the arches can be established considering iar rigiditatea la încovoiere în planul curburii inițiale fiind constantă şi egală cu EI.

Sub acțiunea sarcinilor exterioare, bara se deformează, iar în procesul încovoierii, un punct *m* de pe axa barei va suferi o deplasare mm_1 a cărei componentă radială este $mm_1=z$.

Notând cu φ unghiul ce defineşte secțiunea transversală a barei ce conține punctul m şi cu M momentul încovoietor din această secțiune, produs de acțiunea forțelor exterioare, axa deformată a barei de forma inițială curbă, este definită de ecuația lui Bussinesq (1):

the curve bar AB (fig. 1.a), easily bent in the plan of the curve, having the initial radius of bending equal with R, and bending rigidity in the plan of the initial curve being constant and equal with EI.

Under the action of the external charges, the bar is distorted, and in the bending process, an *m* point on the axis of the bar would suffer a displacement mm_1, whose radial component is $m\,m_1=z$.

Marking with φ the angle defining the transversal section of the bar containing point *m* and with *M* the bending moment from this section, produced by the action of external forces, the deformed axis of the bar having an initial curve form is defined by the equation of Businnesq (1):

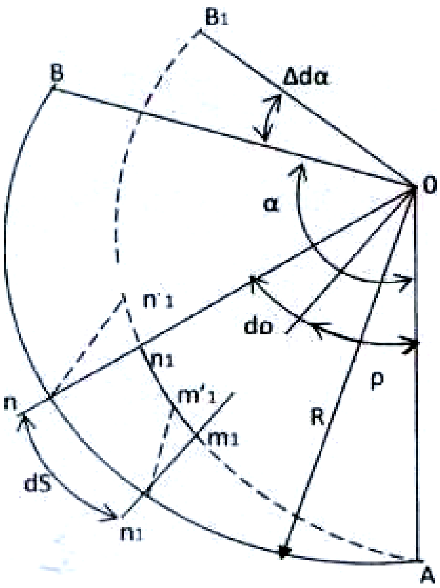

Fig. 1a

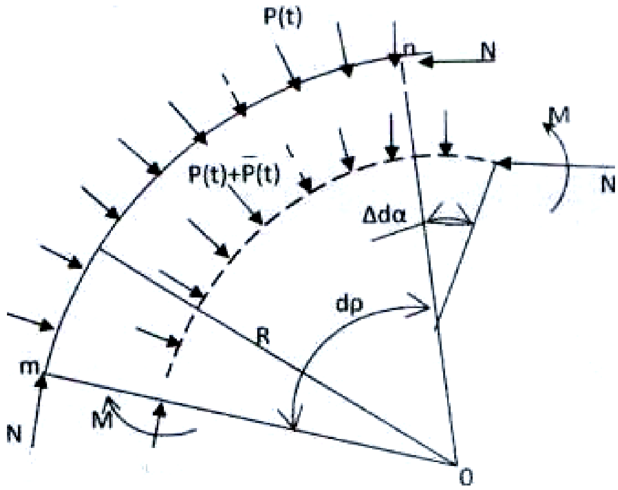

Fig. 1b

$$\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{z}{R^2}=-\frac{M}{EI} \tag{1}$$

Ținând seama de faptul că elementul de lungime al barei curbe ds, se poate exprima prin relația:

Taking into account the fact that the length element of the curve bar *ds*, can be expressed by the relation:

$$ds = R \cdot dl \tag{2}$$

ecuația (1) se poate scrie sub forma:

the equation (1) can be written like:

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}+z=-\frac{MR^2}{EI} \tag{3}$$

Dacă din bara curbă, solicitată de o sarcină radială p(t) se detaşează elementul de arc mn egal ds, asa cum se observa din figura 1b, pentru menţinerea echilibrului (în ipoteza că elementul ds nu suferă nici o deformaţie) este necesar să introducă în punctele m şi n, pe direcţia tangentelor, forţele N= p(t)R. Se observă că prin proiectarea forţelor p(t) pe direcţia razei ce trece prin centrul segmentului ds, se obţine egalitatea:

If from the curve bar, required by a radial charge p(t) can be detached the arch element *mn* equal with *ds* (fig. 1b), to maintain the equilibrium (in the hypothesis that the *ds* element does not suffer any deformation, it is necessary the introduction in the points *m* and *n* – on the direction of the tangents – the forces *N=p(t)R.* It can be observed that by designing the forces p(t) and N on the direction of the beam passing through the center of the *ds* segment, it can be obtained the equality:

$$Ndl = p(t)\cdot ds \tag{4}$$

Sub acţiunea forţelor exterioare, bara curbă suferă însă deformaţii, astfel încât elementul mn va ocupa poziţia m_1n_1. Din cauza variaţiei curburii, reprezentată de termenul din partea stângă a ecuaţiei (1), secţiunea n_1 se roteşte faţă de secţiunea m_1,cu unghiul:

Under the action of the external forces, the curve bar suffers deformations, so that the *mn* element would occupy m_1n_1 position. Due to the variation of the arch, represented by the term from the left part of the equation (1), the *n1* section circumrotates in comparison to the section m1, with the angle:

$$\Delta d\varphi = \left(\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{z}{R^2}\right)ds = \left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}+z\right)\frac{d\varphi}{R} \tag{5}$$

În consecinţă, în aceste secţiuni vor apărea în afară de forţele tangenţiale N şi momente încovoietoare.
Se constată însă că, din cauza rotirii tangentelor din secţiunile m_1 şi n_1, echilibrul elementului ds (în ipoteza că lungimea sa nu s-a modificat şi deci mărimea forţei N a rămas aceiaşi ca înainte de deformare) nu mai este asigurat decât dacă se consideră că pe direcţia razei apare încă o forţă suplimentară $\overline{p}(t)$ (datorită căreia au apărut momentele încovoietoare), ce se determină din ecuaţia de echilibru:

As a consequence, as part of this section would appear- besides tangential forces *N*- also the bending moments.
It can be observed that, due to the circumvolution of the tangents from sections m_1 and n_1, the equilibrium of the *ds* element (in the hypothesis that the length has not been changed and so the size of the N force remained the same as before deformation) is no longer assured than if considered that on the direction of the beam appears another supplementary force $\overline{p}(t)$ (due to which have appeared bending moments), determined with the equilibrium equation:

$$N(dl+\Delta d\varphi) = \left(p(t)+\overline{p}(t)\right)ds \tag{6}$$

Ţinând seama de relaţiile (4) şi (5), rezultă:

Taking into account the relations (4) and (5), results:

$$\overline{p}(t)=\frac{N\Delta d\varphi}{ds}=\frac{p(t)R\Delta dl}{ds}=\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}+z\right)\frac{p(t)}{R} \tag{7}$$

Deci, în procesul de vibrație al arcului, pe direcția deplasărilor radiale, vor acționa alături de forțele p(t) şi forțele suplimentare $\overline{p}(t)$.
În cazul în care se cunoaşte expresia deplasării radiale z, momentul încovoietor M se poate deduce imediat din ecuația diferențiala (3), astfel că energia potențială de deformație W, se poate scrie sub forma:

So, in the vibration process of the arch, on the direction of the radial displacements, we would act alongside forces *p(t)* and supplementary forces $\overline{p}$ *(t)*.
In case the expression of the radial displacement *Z* is known, the bending moment *M* it can immediately be deduced from the differential equation (3), so that the potential deformation energy *W*, can be written like:

$$W=\int_0^\infty \frac{M^2Rd\varphi}{2EI}=\frac{EI}{2R^2}\int_0^\infty\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}+z\right)^2d\varphi \tag{8}$$

Se consideră de asemenea că deformația barei curbe este provocată prin solicitarea cu sarcini radiale, ce acționează în planul curburii inițiale a barei, sarcini ce au expresia:

It is also considered that the deformation of the curve bar is provoked by requiring a radial charge, acting in the plan of the initial curve of the bar, charges having the expression:

$$p(t)=p_0+s\cdot\cos\Omega t \tag{9}$$

unde p_0 este sarcina radială statică, distribuită uniform pe unitatea de lungime a barei, iar *s·cos Ωt* este sarcina variabilă periodică , S fiind aplitudinea, iar Ω frecvența ciclică.
Sub acțiunea sarcinii p(t), bara începe să vibreze, astfel că elementele de masă ale barei vor fi animate de accelerații ți în consecință asupra barei vor acționa forțele de inerție, care pe unitatea de lungime a barei sunt date de relația:

where p_0 is the static radial charge, distributed in an uniform way on the length of the bar, and *s cosΩt* is the periodic variable charge, *s* being the amplitude and Ω the cyclic frequency.
Under the action of the charge p(t), the bar starts to vibrate, so that mass elements of the bar would be moved by accelerations and as a consequence on the bar would act inertia forces, that on the length of the bar are given by the relationship:

$$p_i=m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{10}$$

unde m este masa unității de lungime a barei curbe.
Datorită caracterului staționar al mişcării de vibrație, expresia deplasării radiale a unui punct de pe axa barei se scrie sum forma:

where *m* is the mass of the length unit of the curve bar.
Due to the stationary character of the vibration movements, the expression of the radial displacement of a point on the axis of the bar, it can be written with the form:

$$Z(\varphi,t)=\phi(\varphi)\cdot T(t) \tag{11}$$

unde Z este o funcţie ce depinde excusiv de variabila unghiulară φ, iar T(t) este o funcţie ce depinde excusiv de timp.
Deoarece deplasarea Z(φ,t) trebuie să satisfacă, în orice moment condiţiile la limită, rezultă că şi funcţia Φ(φ) trebuie să satisfacă aceleaşi condiţii ca şi deplasarea Z(φ,t) şi ca atare expresia lui Φ(φ) poate fi determinată funcţie de condiţiile la limită ale barei.
Conform metodei energetice, ecuaţia mişcării de vibraţie se obţine cu ajutorul expresiei:

where Z is a function depending exclusively on the angular variable φ and T(t) is a function depending exclusively on time.
As the displacement *Z(φ,t)* must satisfy – at any moment- the limit conditions, it results that the function Φ (*φ)* must satisfy the same conditions as in the displacement *Z(φ,t),* as such, the expression of Φ *(φ)* can be determined by the conditions at the limit of the bar.
According to the new variation of the energetic method, the equation of the vibration movement can be obtained with the agency of the expression:

$$L_e=W_1 \tag{12}$$

unde L_0 este lucrul mecanic produs de forţele ce acţionează asupra barei (inclusiv forţele de inerţie), iar W este energia potenţială de deformaţi acumulată de către bară şi a cărei expresie este dată de relaţia (8).
Pentru determinarea lucrului mecanic L_0, trebuie avut în vedere faptul că pe direcţiile deplasărilor radiale Z acţionează atât forţele exterioare p(t) şi forţele suplimentare $\overline{p}(t)$ şi forţele de inerţie.
Atunci expresia lucrului mecanic exterior L_e, se poate scrie sub forma:

where L_0 is the mechanic work produced by all forces action on the bar (including the inertia forces) and W is the potential energy of deformation obtained by the bar and whose expression is given by the relation (8).
To determine the mechanic work L_0, we have to take into account the fact that the direction of the radial displacements *Z* act on external forces *p(t)* and on supplementary forces $\overline{p}\,(t)$and on inertia forces.
So, the expression of the external mechanic work expression L_e , it can be written as:

$$L_e=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[p(t)+\overline{p}(t)\right]\cdot R\cdot d\varphi+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}m\frac{\partial^2 z}{\partial t}\cdot z\cdot R\cdot d\varphi \tag{13}$$

sau:

$$L_e=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(p_0+s\cdot\cos\Omega t\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+z+1\right)z\cdot d\varphi+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot zR\cdot d\varphi \tag{14}$$

Substituind expresiile (7) şi (14) în ecuaţia (11) se obţine:

Substituting the expressions (7) and (14) in the equation of condition (11) it can be obtained:

$$\int_0^{\infty}\left(p_0+s\cdot\cos\Omega t\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+z+1\right)z\cdot d\varphi+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}zR\cdot d\varphi-\frac{EI}{R^3}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+z\right)^2\cdot d\varphi=0 \tag{15}$$

Ținând seama de expresia (11), ecuația (15) devine:

Taking into account the expression (11), the equation (15) becomes:

$$\ddot{T}(t)-Q(t)\cdot T(t)=F(t) \tag{16}$$

$$Q(t)=\frac{\frac{EI}{R^3}\int_0^\infty\left(\frac{d^2p}{d\varphi^2}+p\right)^2\cdot d\varphi+\left(p_0+s\cos\Omega t\right)\int_0^\infty\left(\frac{d^2p}{d\varphi^2}+p\right)p\cdot d\varphi}{mR\int_0^\infty p^2\cdot d\varphi} \tag{17}$$

$$F(t)=-\frac{\left(p_0+s\cdot\cos\Omega t\right)\int_0^\infty p\cdot d\varphi}{mR\int_0^\infty p^2\cdot d\varphi}$$

Expresia (16) reprezintă ecuația diferențială a mişcării de vibrație, care are un caracter general, ea fiind aplicabilă pentru orice tip de arc, indiferent de condițiile de limită, forma arcului şi condițiile de rezemare influiențând numai asupra funcțiilor Q(t) şi F(t).

The expression (16) represents the differential equation of the vibration movement, having a general character, being applicable for any type of arch, no matter the limit conditions, the form of the arch and the support conditions influencing only on functions Q(t) and F(t).
As follows, would be established the expressions of the functions Q(t) and *F(t)* for some usual types of arches.

3. CONCLUZII

Aplicarea noii variante a metodei energetice a permis stabilirea cu uşurință a ecuației diferențiale a mişcării de vibrație pentru elementele structurale in formă de arc. Caracterul general al acestei ecuații constă in aceea că ea permite determinarea directă - prin particularizări - a sarcinii critice de flambaj pentru solicitările statice, precum şi a expresiei pulsației oscilațiilor proprii de incovoiere, iar soluțiile ecuației permit o analiză completă a fenomenului instabilității dinamice a structurilor de rezistență.

3. CONCLUSIONS

Applying the new version of the energy method allowed to estabilish the differential equation of the vibration movement for the arc-shaped structural elements. The general character of this equation lies in the fact that it allows direct determination - through customization – of the the critical buckling load for static requests, as well as bending harmonics expression, and the equation solutions enable a full analysis of the dynamic instability phenomenon of resistance structures.

BIBLIOGRAFIE

[1] Darkov A., Kouznetsov V. *Cours de mecanique des constructions.* Edition Mir, Moscou, 1968.
[2] Hangan S., et all. *Mecanica constructiilor*. EDP, Bucuresti, 1975.
[3] Teodorescu M.E. *Dinamica*

BIBLIOGRAPHY

[1] Buzdugan . *Rezistența materialelor*. Editura Tehnică, 1980.
[2] Darkov A., Kouznetsov V. *Cours de mecanique des constructions.* Edition Mir, Moscou, 1968.

constructiilor. Editura Matrixrom, Bucuresti, 2007.
[4] Ivan M, Vulpe A, Banut V. *Statistica, stabilitatea şi dinamica construcțiilor*. Editura E.D.P, 1982.
[3] Hangan S., et all. *Mecanica constructiilor*. EDP, Bucuresti, 1975.
[4] Teodorescu M.E. *Dinamica constructiilor*. Editura Matrixrom, Bucuresti, 2007.
[5] Ivan M, Vulpe A, Banut V. *Statistica, stabilitatea şi dinamica construcțiilor*. Editura E.D.P, 1982.