

**SUBCLASA FUNCȚIILOR  $P$  –  
VALENTE PRIN APLICAREA  
FUNCȚIEI BESSEL ȘI  
TRANSFORMĂRII LAPLACE**

**ABDUL RAHMAN S. JUMA**

*Catedra de Matematică  
Universitatea AL – Anbar  
Irak, [absas662004@yahoo.com](mailto:absas662004@yahoo.com)*

**RAFID H. BUTI**

*Catedra de Matematică și Informatică  
Universitatea AL – Muthanna  
Irak, [Rafidhb@yahoo.com](mailto:Rafidhb@yahoo.com)*

**SUBCLASS OF  $P$  – VALENT  
FUNCTIONS BY APPLYING  
BESSEL’S FUNCTION AND  
LAPLACE TRANSFORMATION**

**ABDUL RAHMAN S. JUMA**

*Department of Mathematics  
University of AL – Anbar  
Iraq, [absas662004@yahoo.com](mailto:absas662004@yahoo.com)*

**RAFID H. BUTI**

*Department of Mathematics and  
Computer Applications  
University of AL – Muthanna  
Iraq, [Rafidhb@yahoo.com](mailto:Rafidhb@yahoo.com)*

**Abstract:** In această lucrare, am studiat o subclasă a funcției  $p$ -valente definită în unitatea disc  $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ . Obținem unele rezultate care includ aplicații ale funcției Bessel și transformării Laplace.

**Clasificarea disciplinei matematice:** 30C45 .

**1. INTRODUCERE**

Fie  $T_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) care denotă o clasă de funcții de forma:

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n},$$

care sunt analitice și are  $P$ -valente în unitatea de disc  $U$ .

Pentru,  $-1 \leq A < 1$  și  $0 \leq \delta < p$ , o funcție  $f \in T_p$  se află în clasa  $T_p^*(A, \delta)$  dacă și numai dacă

$$\left| \frac{\frac{zf'(z)}{f(z)} - p}{\frac{zf'(z)}{f(z)} - Ap - (1-A)\delta} \right| < 1, \quad z \in U. \quad (2)$$

Fie  $S_p$  care denotă o subclasă a  $T_p$  care conține funcții analitice și  $P$ -valente care

**Abstract:** In the present paper, we have studied a subclass of  $p$ -valent function defined in the unit disk  $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ .

We obtain some results including applications of Bessel’s function and Laplace transform.

Mathematics Subject Classification: 30C45 .

**1. INTRODUCTION**

Let  $T_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) denote the class of functions of the form :

$$(1)$$

which are analytic and  $p$ -valent in the unit disk  $U$ .

For,  $-1 \leq A < 1$  and  $0 \leq \delta < p$ , a function  $f \in T_p$  is said to be in the class  $T_p^*(A, \delta)$  if and only if

Let  $S_p$  denote the subclass of  $T_p$  consisting of functions analytic and  $p$ -valent which

pot fi exprimate sub forma:

$$f(z) = z^p - \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n}| z^{p+n}, \quad (3)$$

și fie

$$S_p^*(A, \delta) = T_p^*(A, \delta) \cap S_p. \quad (4)$$

Reținem că, clasa  $S_p^*(-1,0)$  a fost studiată de Geol și Sohi [3]. Clasa  $S_1^*(-1, \delta)$  a fost studiată de Silverman [8]. Clasa  $S_p^*(A, \delta)$  a fost introdusă mai devreme de Pashkoleva și Vasilev [7]. Mai mult, denumim cu  $k-UCV(\alpha, p)$  și  $k-ST(\alpha, p)$  două subclase interesante ale  $S_p$  care constau în funcții care sunt  $k$ -uniform convexe  $p$ -valente de ordinul  $\alpha$  și  $k$ -sub formă de stea  $p$ -valente de ordinul  $\alpha$  în  $U$ , vom avea

$$k-UCV(\alpha, p) = \left\{ f \in S_p : \operatorname{Re} \left( 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha \right) > k \left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - p \right| \right\}, \quad (5)$$

unde  $(-p \leq \alpha < p)$ ,  $k \geq 0$  și  $z \in U$ .  
Și

$$k-ST(\alpha, p) = \left\{ f \in S_p : \operatorname{Re} \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha \right) > k \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| \right\}, \quad (6)$$

unde  $(-p \leq \alpha < p)$ ,  $k \geq 0$ ,  $z \in U$ .  
Reținem că,  $k-ST(\alpha, 1) = k-ST(\alpha)$ ,  
 $k-UCV(\alpha, 1) = k-UCV(\alpha)$ , unde  
 $k-UCV(\alpha)$  și  $k-ST(\alpha)$  sunt clase ale  
 $k$ -uniform convexe și  $k$ -stea. Acum  
 $0-ST(\alpha) = S^*(\alpha)$  și  
 $0-UCV(\alpha) = C(\alpha)$ , unde  $S^*(\alpha)$  și  
 $C(\alpha)$  sunt clasele cunoscute ale funcțiilor  
stea și convexe de ordinul  $\alpha$ .  
 $k-UCV(0, 1) = k-UCV$  și  $k-ST(0, 1) =$   
 $k-ST$ , unde clasa  $k-UCV$  a fost introdusă  
de Kanas și Wisniowska [4] iar clasa  $k-ST$   
a fost investigată în [5].

Sunt mulți autori care au studiat proprietăți interesante ale claselor, Atshan și Buti [1],

can be expressed in the form :

and let

We note that the class  $S_p^*(-1,0)$  was studied by Geol and Sohi [3]. The class  $S_1^*(-1, \delta)$  was studied by Silverman [8]. The class  $S_p^*(A, \delta)$  was introduced earlier by Pashkoleva and Vasilev [7]. Furthermore, we denote by  $k-UCV(\alpha, p)$  and  $k-ST(\alpha, p)$  two interesting subclasses of  $S_p$  consisting respectively of functions which are  $k$ -uniformly convex  $p$ -valent of order  $\alpha$  and  $k$ -starlike  $p$ -valent of order  $\alpha$  in  $U$ , we shall have

where  $(-p \leq \alpha < p)$ ,  $k \geq 0$  and  $z \in U$ .

And

where  $(-p \leq \alpha < p)$ ,  $k \geq 0$ ,  $z \in U$ .

Notice that,  $k-ST(\alpha, 1) = k-ST(\alpha)$ ,  
 $k-UCV(\alpha, 1) = k-UCV(\alpha)$ , where  
 $k-UCV(\alpha)$  and  $k-ST(\alpha)$  are the classes  
of  $k$ -uniformly convex and  $k$ -starlike.  
Now  $0-ST(\alpha) = S^*(\alpha)$  and  
 $0-UCV(\alpha) = C(\alpha)$ , where  $S^*(\alpha)$  and  
 $C(\alpha)$  are the popular classes of starlike and  
convex functions of order  $\alpha$  respectively.  
 $k-UCV(0, 1) = k-UCV$  and  $k-ST(0, 1) =$   
 $k-ST$ , where the class  $k-UCV$  was  
introduced by Kanas and Wisniowska [4]  
and the class  $k-ST$  was investigated in [5].  
There are many authors who have studied  
the various interesting properties of the  
classes, Atshan and Buti [1], Srivastava [9],

Srivastava [9], Barnard, Pearce și Richards [2], Khairnar și Meena More [6].

Barnard, Pearce and Richards [2], Khairnar and Meena More [6].

**Lema 1 [7]:** O funcție  $f \in S_p$  de forma (3) este în clasa  $S_p^*(A, \delta)$  dacă și numai dacă

**Lemma 1 [7]:** A function  $f \in S_p$  of the form (3) is in the class  $S_p^*(A, \delta)$  if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2n + (1 - A)(p - \delta)] |a_{p+n}| \leq (1 - A)(p - \delta). \quad (7)$$

Rezultatul este strict.

The result is sharp.

**Lema 2 [7]:** Dacă  $f \in S_p^*(A, \delta)$ , atunci

**Lemma 2 [7]:** If  $f \in S_p^*(A, \delta)$ , then

$$|a_{p+n}| \leq \frac{(1 - A)(p - \delta)}{2n + (1 - A)(p - \delta)}, \quad (8)$$

Care este egal numai pentru funcțiile de forma:

which equality only for functions of the form :

$$f(z) = z^p - \frac{(1 - A)(p - \delta)}{2n + (1 - A)(p - \delta)} z^{p+n}. \quad (9)$$

**Lema 3 [1]:** Fie  $f \in S_p$  de forma (3). Dacă pentru  $k \geq 0$ , inegalitatea următoare

**Lemma 3 [1]:** Let  $f \in S_p$  be of the form (3). If for some  $k \geq 0$ , the following inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p + n)[(k + 1)n + 1] |a_{p+n}| \leq p, \quad (10)$$

Este adevărată, atunci  $f \in k - UCV(\alpha, p)$ .

holds true, then  $f \in k - UCV(\alpha, p)$ .

**Lema 4 [1]:** fie  $f \in S_p$  de forma (3). Dacă pentru  $k \geq 0$ , inegalitatea următoare

**Lemma 4 [1]:** Let  $f \in S_p$  be of the form (3). If for some  $k \geq 0$ , the following inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(k + 1) + 1] |a_{p+n}| \leq p, \quad (11)$$

Este adevărată, atunci  $f \in k - ST(\alpha, p)$ .

holds true, then  $f \in k - ST(\alpha, p)$ .

Funcția Bessel de tipul și ordinul  $\mu$  este definită de forma:

The Bessel's function of type and order  $\mu$  is defined by the form:

$$J_{\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \mu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n + \mu}. \quad (12)$$

Fie funcția  $R(z) = J_0(z^{\frac{p+n}{2n}}) - (1 - z^p)$ , unde  $J_0(z^{\frac{p+n}{2n}})$  funcția Bessel de tipul și ordinul 0 și

Let the function  $R(z) = J_0(z^{\frac{p+n}{2n}}) - (1 - z^p)$ , where  $J_0(z^{\frac{p+n}{2n}})$  Bessel's function of type and order 0 and

$$J_0(z^{\frac{p+n}{2n}}) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1)} \left( \frac{z^{p+n}}{2^{2n}} \right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(n) z^{n+p}, \quad (13)$$

Unde

$$\Psi(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} n! \Gamma(n+1)}. \quad (14)$$

Formând (13), obținem

$$R(z) = z^p - \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(n) z^{n+p}. \quad (15)$$

In teorema următoare, arătăm că funcția  $W(z)$  din clasa  $S_p^*(A, \delta)$ , unde  $W(z)$  definit de forma :

$$W(z) = f(z) * R(z) = z^p - \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n}| \Psi(n) z^{n+p}. \quad (16)$$

**Teorema 1 :** Fie  $f \in S_p^*(A, \delta)$ . Atunci funcția  $W(z)$  definită de (15) este în clasa  $S_p^*(A, \delta)$ .

**Demonstrație :** Să presupunem că  $f \in S_p^*(A, \delta)$ , atunci din Lema 1, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2n + (1-A)(p-\delta)]$$

$$|a_{p+n}| \leq (1-A)(p-\delta).$$

Deci, folosind (14), obținem

$$|\Psi(n)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} n! \Gamma(n+1)} \right| = \frac{1}{2^{2n} n! \Gamma(n+1)} \quad (17)$$

$$\leq 1.$$

De aici

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2n + (1-A)(p-\delta)] |\Psi(n)| |a_{p+n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} [2n + (1-A)(p-\delta)] |a_{p+n}| \leq (1-A)(p-\delta).$$

Aceasta completează demonstrația.

In teoremele următoare, arătăm că funcția

Where

Form (13), we get

In the next theorem, we show that the function  $W(z)$  in the class  $S_p^*(A, \delta)$ , where  $W(z)$  defined by the form :

**Theorem 1 :** Let  $f \in S_p^*(A, \delta)$ . Then the function  $W(z)$  defined by (15) be in the class  $S_p^*(A, \delta)$ .

**Proof :** Suppose that  $f \in S_p^*(A, \delta)$ , then from Lemma 1, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2n + (1-A)(p-\delta)]$$

$$|a_{p+n}| \leq (1-A)(p-\delta).$$

So, by using (14), we get

Hence

This completes the proof.

In the following theorems, we show that the

$W(z)$  definită de (15) este în clasa  $k-ST(\alpha, p)$  și respectiv  $k-UCV(\alpha, p)$ .

function  $W(z)$  defined by (15) be in the class  $k-ST(\alpha, p)$  and  $k-UCV(\alpha, p)$  respectively.

**Teorema 2 :** Dacă  $f \in S_p^*(A, \delta)$  și pentru  $k \geq 0$ , dacă următoarea inegalitate

**Theorem 2 :** If  $f \in S_p^*(A, \delta)$  and for some  $k \geq 0$ , if the following inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n-1)!(2n+(1-A)(p-\delta))} \leq \frac{p}{(k+2)(1-A)(p-\delta)}, \quad (18)$$

este adevărată, atunci  $W(z) \in k-ST(\alpha, p)$ .

holds true, then  $W(z) \in k-ST(\alpha, p)$ .

**Demonstrație :** Folosind (17), obținem

**Proof :** By using (17), we get

$$|\Psi(n)| \leq \frac{1}{2^{2n} n!}. \quad (19)$$

Pentru  $f \in S_p^*(A, \delta)$ , prin Lema 2 și (19), obținem

For  $f \in S_p^*(A, \delta)$ , by Lemma 2 and (19), we get

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [n(k+1)+1] |\Psi(n)| |a_{p+n}| \\ & \leq (k+2)(1-A)(p-\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n-1)!(2n+(1-A)(p-\delta))} \end{aligned} \quad (20)$$

În final, dacă folosim ipoteza (18) în (20), avem

Finally, if we make use of the hypothesis (18) in (20), we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(k+1)+1] |\Psi(n)| |a_{p+n}| \leq p. \quad \sum_{n=1}^{\infty} [n(k+1)+1] |\Psi(n)| |a_{p+n}| \leq p.$$

Deci, folosind (16) și Lema 4, avem  $W(z) \in k-ST(\alpha, p)$ .

So by using (16) and Lemma 4, we get  $W(z) \in k-ST(\alpha, p)$ .

Aceasta completează demonstrația.

This completes the proof.

**Teorema 3 :** Fie  $(0 < \gamma < p)$ . Dacă  $f \in S_p^*(A, \delta)$  și pentru  $k \geq 0$ , dacă următoarele inegalități

**Theorem 3 :** Let  $(0 < \gamma < p)$ . If  $f \in S_p^*(A, \delta)$  and for some  $k \geq 0$ , if the following inequalities

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+n)}{2^{2n}(n-1)!(2n+(1-A)(p-\delta))} \leq \frac{\gamma}{(k+1)(1-A)(p-\delta)}, \quad (21)$$

Și

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+n)}{2^{2n} n!(2n+(1-A)(p-\delta))} \leq \frac{p-\gamma}{(1-A)(p-\delta)}, \quad (22)$$

sunt adevărate, atunci are hold true, then  $W(z) \in k-UCV(\alpha, p)$ .  
 $W(z) \in k-UCV(\alpha, p)$ . Proof of Theorem 3 is similar to proof of  
 Demonstrația Teoremei 3 este asemănătoare Theorem 2.  
 demonstrației Teoremei 2. The Laplace transform is defined by the  
 Transformarea Laplace este definită de form: form:

$$L(f(z)) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(t) dt \quad (23)$$

Fie funcția  $H(z)$  definită de forma: Let the function  $H(z)$  defined by the form:

$$H(z) = z^p \left[ 1 - z^n \left( 1 + \frac{\theta^{p+1}}{p!} * L(f(z)) \right) \right]$$

$$= z^p - \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n}| \lambda(n, p, \theta) z^{n+p}, \quad (24)$$

unde where

$$\lambda(n, p, \theta) = \frac{(p+n)!}{\theta^n p!} \quad (25)$$

și  $f(z)$  definită de (3). and  $f(z)$  defined by (3).  
 In Teoremele următoare, arătăm că funcția In the next Theorems, we show that the  
 $H(z)$  definită de (24) este în clasa function  $H(z)$  defined by (24) be in the  
 $k-ST(\alpha, p)$  și respectiv  $k-UCV(\alpha, p)$  class  $k-ST(\alpha, p)$  and  $k-UCV(\alpha, p)$   
 respectively.

**Teorema 4:** Fie  $(0 < \xi < p)$ . Dacă **Theorem 4:** Let  $(0 < \xi < p)$ . If  
 $f \in S_p^*(A, \delta)$  și pentru  $k \geq 0$ , if  $f \in S_p^*(A, \delta)$  and for some  $k \geq 0$ , if the  
 următoarele inegalități following inequalities

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(p+n)!(p+n)}{\theta^n} \leq \frac{\xi(1-A)}{(k+1)(p-\delta)}, \quad (26)$$

Și and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+n)!(p+n)}{\theta^n} \leq \frac{(p-\xi)(1-A)}{(p-\delta)}, \quad (27)$$

sunt adevărate, atunci are hold true, then  $H(z) \in k-UCV(\alpha, p)$ .  
 $H(z) \in k-UCV(\alpha, p)$ . **Proof:** By using (24), we get

**Demonstrație:** Folosind (24), obținem

$$|\lambda(n, p, \theta)| \leq \frac{(p+n)!}{\theta^n} \quad (28)$$

Pentru  $f \in S_p^*(A, \delta)$  , prin Lema 2 , avem      For  $f \in S_p^*(A, \delta)$  , by Lemma 2 , we get

$$|a_{p+n}| \leq \frac{(p - \delta)}{(1 - A)} . \tag{29}$$

Acum , pentru (27) și (28) , avem      Now , from (27) and (28) , we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p + n)[n(k + 1)]|\lambda(n, p, \theta)||a_{p+n}| \leq \frac{(k + 1)(p - \delta)}{(1 - A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(p + n)!(p + n)}{\theta^n} \tag{30}$$

Și      and

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p + n)|\lambda(n, p, \theta)||a_{p+n}| \leq \frac{(p - \delta)}{(1 - A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p + n)!(p + n)}{\theta^n} . \tag{31}$$

De aici de la (30) și (31) , avem      Hence from (30) and (31) , we get

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (p + n)[n(k + 1) + 1]|\lambda(n, p, \theta)||a_{p+n}| &\leq \frac{(k + 1)(p - \delta)}{(1 - A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(p + n)!(p + n)}{\theta^n} \\ &+ \frac{(p - \delta)}{(1 - A)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p + n)!(p + n)}{\theta^n} . \end{aligned} \tag{32}$$

In final, dacă folosim ipoteza (26) și (27) in (32), avem      Finally , if we make use of the hypothesis (26) and (27) in (32), we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p + n)[(k + 1)n + 1]|\lambda(n, p, \theta)||a_{p+n}| \leq p . \quad \sum_{n=1}^{\infty} (p + n)[(k + 1)n + 1]|\lambda(n, p, \theta)||a_{p+n}| \leq p .$$

Deci, folosind (24) și Lema 3, avem  $H(z) \in k - UCV(\alpha, p)$ .      So by using (24) and Lemma 3, we get  $H(z) \in k - UCV(\alpha, p)$ .

Aceasta completează demonstrația.      This completes the proof .

**Teorema 5 :** Fie  $(0 < \eta < p)$  . Dacă Theorem 5 : Let  $(0 < \eta < p)$  . If  $f \in S_p^*(A, \delta)$  și pentru  $k \geq 0$ , if      dacă  $f \in S_p^*(A, \delta)$  and for some  $k \geq 0$ , if the următoarele inegalități      following inequalities

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p + n)!}{\theta^n} \leq \frac{\eta(1 - A)}{(p - \delta)} , \tag{33}$$

Și      and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(p + n)!}{\theta^n} \leq \frac{(p - \eta)(1 - A)}{(k + 1)(p - \delta)} , \tag{34}$$

sunt adevărate ,      atunci are hold true , then  $H(z) \in k - ST(\alpha, p)$ .  
 $H(z) \in k - ST(\alpha, p)$ .      Proof of Theorem 5 is similar to proof of

Demonstrația Teoremei 5 este asemănătoare cu demonstrația Teoremei 4 . Theorem 4 .

### **BIBLIOGRAFIE**

- [1] W. G. Atshan și R. H. Buti, *Despre funcțiile hipergeometrice generalizate și clasele asociate ale funcției  $p$ -valente  $k$ -uniform convexe și  $k$ -sub formă de stea*, Descoperiri și Aplicații în Științele Matematice 6(2) (2010), 149 – 160 .
- [2] R.W. Barnard, K. Pearce și K. C. Richards, *O inegalitate care implică funcția hipergeometrică generalizată și lungimea arcului unei elipse*, SIAM J. Math .Anal.,31 (3)(2000), 693-699.
- [3] R. M. Goel și N. S. Sohi, *Funcții multivalente cu coeficienți negativi*, Indian J. Matematică Pură 12 (7) (1981),844-853.
- [4] S. Kanas și A. Wisniowska, *Regiuni conice și convexitate uniformă  $k$ -*, J. Aplicații matematice pe calculator 105(1999) 327-336.
- [5] S. Kanas și A. Wisniowska, *Regiuni conice și funcții stea  $k$ -*, Revista Română de Matematică 45(2000), 647-657.
- [6] S. M. Khairnar și M. More, *Despre o subclasă a funcțiilor stea și convexe multivalente  $\beta$ - definite de un operator liniar*, IAENG Int. J. Aplicații Matematice, 39:3, IJAM -39-06,(2009),1-9.
- [7] D. Z. Pashkouleva, K.V. Vasilev , *Despre o clasă a funcțiilor multivalente cu coeficienți negativi*, J. Mathemateca ,Tom 34, KH.3 (2004), 61-67.
- [8] H. Sliverman , *Funcții univalente cu coeficienți negativi*, Proc. Amer. Math. Soc., 51(1975) , 109-116.
- [9] H. M. Srivastava, *Funcții hipergeometrice generalizate și familiile asociate de funcții  $k$ -uniform convexe și funcții  $k$ -stea*, Matematică Generală Vol. 15, Nr. 2-3 (2007) , 201-226.

### **REFERENCES**

- [1] W. G. Atshan and R. H. Buti, *On generalized hypergeometric functions and associated classes of  $k$ -uniformly convex and  $k$ -starlike  $p$ -valent functions* , Advances and Appli. in Math. Sci. 6(2) (2010), 149 – 160 .
- [2] R.W. Barnard, K. Pearce and K. C. Richards, *An inequality involving the generalized hypergeometric function and the arc length of an ellipse*, SIAM J. Math .Anal.,31 (3)(2000), 693-699.
- [3] R. M. Goel and N. S. Sohi, *Multivalent functions with negative coefficients*, Indian J. Pure Math. 12 (7) (1981),844-853.
- [4] S. Kanas and A. Wisniowska, *Conic regions and  $k$ -uniform convexity*, J. Comput. Appl. Math. 105(1999) 327-336.
- [5] S. Kanas and A. Wisniowska, *Conic regions and  $k$ -starlike functions*, Rev. Roumaine Math. Pures. 45(2000), 647-657.
- [6] S. M. Khairnar and M. More, *On a subclass of multivalent  $\beta$ -uniformly starlike and convex functions defined by a linear operator*, IAENG Int. J. Appl. Math., 39:3, IJAM -39-06,(2009),1-9.
- [7] D. Z. Pashkouleva, K.V. Vasilev , *On a class of multivalent functions with negative coefficients*, J. Mathemateca ,Tom 34, KH.3 (2004), 61-67.
- [8] H. Sliverman , *Univalent functions with negative coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., 51(1975) , 109-116.
- [9] H. M. Srivastava, *Generalized hypergeometric functions and associated families of  $k$ -uniformly convex and  $k$ -starlike functions*, Gen. Math. Vol. 15, Nr. 2-3 (2007) , 201-226.