ASPECTE PRIVIND REPREZENTAREA MĂRIMILOR SINUSOIDALE PRIN NUMERE COMPLEXE

Cristinel Popescu[1], *Ş.l.dr.ing. Universitatea „Constantin Brancuşi" din Tg-Jiu*
Vasile Cozma[2], *Prof.univ.dr.ing. Universitatea „Constantin Brancuşi" din Tg-jiu*

Abstract: În electroenergetica modernă, producţia, transportul, distribuţia şi utilizarea energiei electrice se realizează exclusiv în sisteme trifazate de circuite electrice. Un sistem trifazat de mărimi sinusoidale identice este simetric, când mărimile separate sunt egale ca valoare (au amplitudini identice) şi sunt defazate una faţă de cealaltă cu unul şi acelaşi unghi, egal cu (120^o).

1. Introducere

Sistemul trifazat de circuite electrice (circuit trifazat) este constituit din trei circuite electrice, în care acţionează t.e.m. sinusoidale cu aceeaşi frecvenţă şi diferenţă de fază stabilită între ele. Prin definiţie rezultă, că numărul de circuite stabileşte numărul fazelor. În consecinţă, în electrotehnică cu noţiunea de fază se stabileşte:

- starea de oscilaţie a unei mărimi sinusoidale la un moment determinat de timp;
- partea de circuit din sistemul trifazat de circuite.

La utilizarea metodei simbolice, funcţiile sinusoidale se reprezintă în formă simbolică (forma complexă), adică se reprezintă prin fazori rotitori, reprezentaţi prin numere complexe. Este cunoscut că în fiecare punct din planul complex se determină cu un fazor a cărui origine

ASPECTS REGARDING THE SINUSOIDAL SIZES REPREZENTATION BY COMPLEX NUMBERS

Cristinel Popescu[1], *PhD associate professor - University „Constantin Brancusi" of Tg-jiu*
Vasile Cozma[2], *PhD professor - University „Constantin Brancusi" of Tg-jiu*

Abstract: In modern power production, transportation, distribution and the use of electricity is essentially realized in three-phase systems of electric circuits. An identical three-phase system sinusoidal identic sizes is symmetrical when separate sizes are equal in value (amplitudes are identical) and are out of phase with each other with one and the same angle, equal with (120^o).

1. Introduction

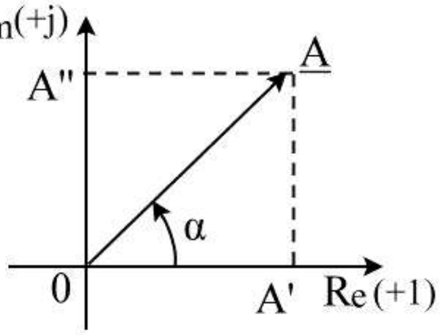
The three-phase electric circuit (three-phase circuit) consists of three electrical circuits in which operate at the same frequency sinusoidal fear and fixed phase difference of each other. By definition it follows that the number of circuit establish the number of phases. Consequently,in electrotehnic the notion of phase establish:

- oscillation status of a sinusoidal size at a specified moment of time;
- the circuit of three phase circuit system.

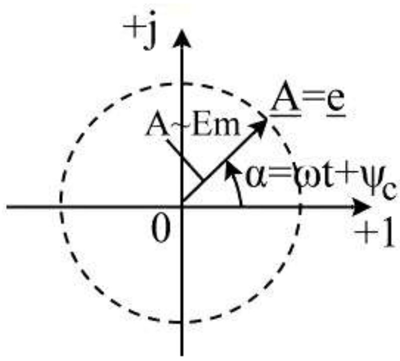
When using the symbolic method, sinusoidal functions are represented in symbolic form (complex form), that is represented by rotating phasors, represented by complex numbers. It is known that each point is determined by a complex plane phasors whose origin coincide cu originea axelor de coordonate, iar sfârşitul său cu punctul dat ce corespunde unui număr complex.

Astfel, de exemplu, numărul complex $\underline{A}$ (fig.1 *a*) este complet determinat dacă sunt cunoscute modulul $\left(A = \sqrt{A'^2 + A''^2}\right)$ şi argumentul acestuia $\left(\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{A''}{A'}\right)$. Mărimile $A' = A\cos\alpha = \mathrm{Re}(\underline{A})$ şi $A'' = A\sin\alpha = I_m(\underline{A})$ sunt în mod corespunzător componentele reală şi imaginară ale lui $\underline{A}$.

coincides with the axes origin and its end point corresponds to a given complex number. Thus, for example, the complex number $\underline{A}$ Fig. (1 *a)* is completely determined if it's known the module $\left(A = \sqrt{A'^2 + A''^2}\right)$ and its argument $\left(\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{A''}{A'}\right)$. Sizes $A' = A\cos\alpha = \mathrm{Re}(\underline{A})$ and $A'' = A\sin\alpha = I_m(\underline{A})$ are adequately's real and imaginary components of $\underline{A}$.



a



b

Fig.1 *a* Reprezentarea unui număr complex în funcţie de componentele reală şi imaginară

Fig.1 *b* Reprezentarea fazorului rotativ a t.e.m. al cărui argument este dependent de timp

Fig.1a Representation of a complex number depending on real and imaginary components

Fig.1*b* Representation *of* rotating phasor t.e.m. whose argument is depending on the time

Numărul complex $\underline{A}$ se poate reprezenta şi în formele algebrică, trigonometrică şi exponenţială, astfel:

Complex number $\underline{A}$ can be represented in algebraic forms, trigonometric and exponential, as follows:

$$\underline{A} = A' + jA'' = A(\cos\alpha + j\sin\alpha) = A \cdot e^{j\alpha} \quad (1)$$

În relaţia (1), unitatea imaginară se

In relation (1), the imaginary unit is

notează cu $j=\sqrt{-1}$, pentru a se deosebi de valoarea momentană a curentului i. În mod corespunzător $j^2=-1$.

Se admite, că modulul A este proporţional cu amplitudinea mărimii sinusoidale $e=E_m\sin(\omega t+\Psi_e)$ adică $A\cong E_m$, iar argumentul este egal cu unghiul de fază al acestei mărimi, adică $\alpha=\omega t+\Psi_e$. Atunci numărul complex, scris în forma trigonometrică este:

denoted $j=\sqrt{-1}$, to distinguish themselves from the momentary value of current i. Correspondingly $j^2=-1$.

It is recognized that the module A is proportional to the size of sinusoidal amplitude $e=E_m\sin(\omega t+\Psi_e)$, $A\cong E_m$, And the argument is equal to the phase angle of this size, $\alpha=\omega t+\Psi_e$. Then the complex number written in trigonometric form is:

$$\underline{A}=A(\cos\alpha+j\sin\alpha)=E_m\left[\cos\left(\omega t+\Psi_e\right)+j\sin\left(\omega t+\Psi_e\right)\right] \quad (2)$$

În consecinţă, componenta imaginară I_m ($\underline{A}$) a numărului complex $\underline{A}$ este proporţională cu valoarea momentană a t.e.m. sinusoidale, adică:

Consequently, the imaginary component I_m ($\underline{A}$) of the complex number $\underline{A}$ is propotional to the sinusoidal t.e.m. momentary value:

$$I_m(\underline{A})=E_m\sin\left(\omega t+\Psi_e\right) \quad (3)$$

Expresia (3) stabileşte legătura directă dintre numărul complex $\underline{A}$ şi valoarea momentană a t.e.m. sinusoidale. Întrucât argumentul $\alpha=\omega t+\Psi_e$ este dependent de timp, fazorul cu modulul $A\cong E_m$ (fig.1 *b*) este fazor rotativ. În fiecare moment de timp, proiecţia acestui fazor pe axa ordonatelor (imaginară), adică componenta imaginară a lui $\underline{A}$, reprezintă valoarea momentană a t.e.m. sinusoidale.

Iată de ce, numărul complex $\underline{A}$ se numeşte valoarea momentană complexă a t.e.m. Prin raţionament similar, se definesc valorile momentane complexe ale cu-rentului şi tensiunii. Valoarea complexă se notează cu aceeaşi literă, ca şi mărimea sinusoidală corespunzătoare, când dedesubtul ei se pune linie. În acest caz, valorile momentane complexe ale t.e.m. , curenţilor şi tensiunilor de variaţie sinusoidală, sunt:

Expression (3) establishes a direct link between the complex number $\underline{A}$ and the sinusoidal t.e.m. momentary value . Since the argument $\alpha=\omega t+\Psi_e$ is time dependent, the phasor with module $A\cong E_m$ (fig.1 *b*) is rotative phasor. At each moment of time, this projection phasors on the ordinate axis (imaginary), the imaginary part of $\underline{A}$, represents the sinusoidal t.e.m. momentary value

This is why the complex number $\underline{A}$ is called the complex t.e.m. momentary value. By similar reasoning, are defined the momentary complex values of the current and the voltage.The complex value is denoted by the same letter,like the appropriate sinusoidal size,when below it, is crossed a line. In this case the complex momentary values of the t.e.m,the currents and the sinusoidal variation of voltages are:

$$\underline{e} = E_m \cdot e^{-j(\omega t+\Psi_e)}, \quad \underline{i} = I_m \cdot e^{-j(\omega t+\Psi_i)}; \quad \underline{u} = U_m \cdot e^{-j(\omega t+\Psi_u)} \quad (4)$$

Atunci când mărimile sinusoidale variază cu aceeaşi pulsaţie ω, fazorii rotativi, exprimaţi prin numere complexe, în procesul de rotaţie se menţin reciproc ca poziţie unul faţă de celălalt. Aceasta este determinată de diferenţa de fază dintre mărimile corespunzătoare. Aceasta permite fazorilor, de a se examina ca imobili, adică la momentul iniţial de timp t=0. Prin acest procedeu se definesc valorile complexe ale amplitudinilor t.e.m., curenţilor şi tensiunilor de variaţie sinusoidală, care au forma:

When the sinusoidal sizes vary with the same ω,the rotating phasors, expressed by complex numbers, in the rotation process are maintaing each other as position one from other This is determinated by the phase difference of corresponding sizes .This allows to the phasors to examine themselves as immobiles ,at the initial time t=0. Through this process is defining the complex values of the amplitudes of the t.e.m. the sinusoidal variation voltages of and the currents, which have the form:

$$\underline{E}_m = E_m \cdot e^{j \cdot \Psi_e}, \quad \underline{I}_m = I_m \cdot e^{j\Psi_i}, \quad \text{şi} \quad \underline{U}_m = U_m \cdot e^{j\Psi_u} \quad (5)$$

Dacă egalităţile (4) se împart cu $\sqrt{2}$ se obţin corespunzător valorile efective complexe ale mărimilor sau:

If equalties (4) divide with $\sqrt{2}$ there are obtained the complex values of the sizes or:

$$\underline{E} = E \cdot e^{j\Psi_e}, \quad \underline{I} = I \cdot e^{j\Psi_i}, \quad \text{şi} \quad \underline{U} = U \cdot e^{j\Psi_u} \quad (6)$$

Caracteristicile de bază ale mărimilor sinusoidale sunt valorile lor efective şi fazele lor iniţiale. Iată de ce, obişnuit prin valoarea complexă sau complexul unei mărimi sinusoidale se înţelege valoarea ei efectivă complexă cu modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii şi argumentul egal cu faza iniţială.

The basic characteristics of the sinusoidal sizes are their actual values and their intitial phases. That is why, used by a complex value or the complex of a sinusoidal size it means its actual value equal to the actual module size and the argument is equal to the initial phase.

2. Circuite cu mărimi electrice, nesinusoidale, periodice

Cum s-a arătat anterior, forma sinusoidală de variaţie a mărimilor electrice permite a se realiza cel mai economic producţia, transportul şi utilizarea energiei electrice. În practică însă, din diferite motive, între care şi imposibilitatea obţinerii t.e.m.

2. Circuits with Electrical, nonsinusoidal, and periodic sizes

As stated above, a sinusoidal form of variation of electrical quantities allows to make the most economical production and use of electricity. In practice, however, for various reasons, including inability to obtain perfect sinusoidal t.e.m. or the presence of nonlinear circuit elements, perfect sinusoidale sau prezenţa elementelor neliniare în circuite, care determină abateri de la această formă, mărimile au o variaţie nesinusoidală. Pe lângă aceasta, de multe ori pentru necesităţile automaticii, tehnicii de calcul ş.a. se utilizează surse de tensiuni cu forme: dreptunghiulară, triunghiulară ş.a.

Mărimile nesinusoidale, cu variaţie periodică (t.e.m., curenţi, tensiuni) se pot reprezenta analitic (există procedee grafice şi spectrale de reprezentare) cu seria Fourier, ca sumă de componentă continuă şi serie de componente cu variaţie sinu-soidală numite armonici.

Dacă f(t) este funcţia nesinusoidală variabilă periodic, descompusă în serie Fourier, ea are forma:

which causes deviations from that form, quantities have a nonsinusoidal variation. In addition, many times for the needs of automation, computers, etc.are used sources of tension with the forms: rectangular, triangular, etc.

Sizes nonsinusoidal, periodic variable (t.e.m., currents, voltages) can be analytically represented(there are graphics processes and spectral representation) with Fourier series, as sum of continuous component and components series with sinusoidal variation called harmonics. If f(t) is the nonsinusoidal regularly varying decomposed in Fourier series, it has the form:

$$f(t) = A_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \Psi_k) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) + \\ + A_{2m} \sin(2\omega t + \Psi_2) + ... + A_{km} \sin(k\omega t + \Psi_k) \quad (7)$$

unde:

A_0 – componentă continuă, egală cu valoarea medie a funcţiei f(t), iar ceilalţi membrii se numesc armonicele lui f(t). Prima componentă sinusoidală (k=1) $A_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1)$ cu frecvenţa funcţiei sinusoidale f(t) este numită ***prima armonică*** sau ***armonica fundamentală***. Celelalte armonici, cu frecvenţe multiple frecvenţei armonicii de bază ($k\omega$; unde k>1) sunt numite ***armonici superioare*** care sunt armonici impare pentru k=1, 3, 5... şi armonici pare când k=2, 4, 6...

Dacă se utilizează dependenţa $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, expresia (7) capătă forma:

where:

A_0 – continuous component, equal to the average value of the function f (t), while other members are called harmonics of f (t). The first sinusoidal component (k=1) $A_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1)$ with thee frequency of the sinusoidal functionf(t) is called the ***first harmonic*** or ***fundamental harmonic.*** The other harmonics, with frequencies multiple to the basic harmonic frequency ($k\omega$; unde k>1) are called ***higher harmonics***, which are uneven harmonics for k=1, 3, 5... and even harmonics when k=2, 4, 6...

If it is used the dependancy $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, expression (7) takes the form:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\omega t, \quad (8)$$

unde:

$$B_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{km}} \cos\Psi_{\mathbf{k}} \quad \text{şi} \quad C_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{km}} \sin\Psi_{\mathbf{k}}.$$

Coeficienţii din relaţia (8), după cum este cunoscut de la matermatică se determină cu expresiile:

The coefficients of equation (8), as is known in mathematics are determined by expressions:

$$A_{\mathbf{0}} = \frac{1}{T}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} f(t)dt;\ B_{\mathbf{k}} = \frac{2}{T}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} f(t)\cdot \sin k\omega t\cdot dt;\ C_{\mathbf{k}} = \frac{2}{T}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} f(t)\cdot \cos k\omega t\cdot dt; \tag{9}$$

Legătura dintre coeficienţii $B_{\mathbf{k}}$ şi $C_{\mathbf{k}}$ sub aspectul amplitudinilor $A_{\mathbf{km}}$ şi fazelor iniţiale $\Psi_{\mathbf{k}}$ pe de altă parte este:

The relationship between the coefficients $B_{\mathbf{k}}$ and $C_{\mathbf{k}}$ in terms of initial phases and amplitudes $A_{\mathbf{km}}$ on the other side is:

$$A_{\mathbf{km}} = \sqrt{B_{\mathbf{k}}^2 + C_{\mathbf{k}}^2} \quad \text{şi} \quad tg\Psi_{\mathbf{k}} = \frac{C_{\mathbf{k}}}{B_{\mathbf{k}}} \tag{10}$$

Dacă graficele funcţiilor nesinusoidale periodice sunt simetrice faţă de axele de coordonate, unii din termenii funcţiei Fourier lipsesc. Spre exemplu, dacă graficul este simetric faţă de axa abscisei din seria Fourier se elimină $A_{\mathbf{0}}$ şi armonicele pare.

Şi cele două funcţii periodice descompuse în serie Fourier au prima şi a treia armonică, dar armonicele lor de ordinul trei au diferite faze iniţiale:

If the nonsinusoidal functions graphs are symmetric to coordinate axes, some of the Fourier function terms are missing. For example, if the graph is symmetrical about the abscissa axis from Fourier series, is eliminated $A_{\mathbf{0}}$ and the even harmonic.

And the two periodic functions decomposed into Fourier series have the firstand the third harmonic, but their third order harmonics have different initial phases:

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{a}} &= e_{\mathbf{1a}} + e_{\mathbf{3a}} = E_{\mathbf{1ma}} \sin\omega t + E_{\mathbf{3ma}} \sin 3\omega t \\ e_{\mathbf{b}} &= e_{\mathbf{1b}} + e_{\mathbf{3b}} = E_{\mathbf{1mb}} \sin\omega t + E_{\mathbf{3mb}} \sin 3\omega t \end{aligned} \tag{11}$$

Valoarea efectivă a unei mărimi nesinusoidale periodic, se determină ca la mărimile sinusoidale.

Actual value of a periodic nonsinusoidal quantities, is determined as the sine sizes.

3. Concluzii

Pentru analiza circuitelor electrice liniare în regimuri periodice nesinusoidale se utilizează principiul superpoziţiei (suprapunerii efectelor).În acest sens fiecare

3. Conclusions

For the analysis of the linear electric circuits in regular nonsinusoidal regimes,it is used the superposition principle(superposition).In this regard each t.e.m. nesinusoidală ce acţionează în circuit se descompune în serie Fourier. Prin acest raţionament, sursa de t.e.m. nesinusoidală se înlocuieşte cu un număr mare de surse, una dintre ele fiind sursă de t.e.m. continuă, egală cu componenta continuă, iar celelalte sunt surse de t.e.m. sinusoidale, ce corespund celorlalte armonici.

În acest caz, analiza regimului nesinuoidal se reduce la studiul succesiv al unui regim de c.c. şi unui număr mare de regimuri sinusoidale de diferite frecvenţe. Calculul circuitului în regimuri particulare se realizează cu metode deja cunoscute pentru analiza circuitelor electrice liniare. Curenţii particulari obţinuţi prin calcule separate se adună şi se determină curenţii nesinusoidali căutaţi.

4. Bibliografie

[1]. Cozma V., Popescu C. – Aparate şi maşini electrice, Ed. SITECH, Craiova, 2007.

[2]. Ghe. Savin, H. Rosman – Circuite Electrice Neliniare şi Parametrice, Editura Tehnică, Bucureşti,1973

[3]. Iustina Zaharia, ş.a. – Bazele Electrotehnicii, Editura Tehnopresss

[4]. Popescu C., ş.a. – Electrotehnică şi maşini electrice, Ed. Sitech, Craiova, 2008

[5]. Popescu C. – Studiul privind circuitele electrice de curent alternativ utilizate în configuraţia isntalaţiilor electrice, Conferinţă de lucrări, noiembrie 2010, Tg-Jiu

[6]. Ţîrcă A., Popescu C., – Îndrumar de Electrotehnică, Ed. Academica Brâncuşi, Tg-Jiu, 2008

nonsinusoidal t.e.m. which acts in the circuit decomposes in Fourier series.By this reasoning,the nonsinusoidal t.e.m.source is replaced by a large number of sources,one of them is t.e.m. continuous source,equal with the continuous component,and the others are sinusoidal t.e.m.sources, correspond to other harmonics.

In this case, the non sinusoidal regime analysis is reduced to successively study nesinuoidal of a c.c. system and a large number of different frequencies of sinusoidal regimes. Circuit calculation in private schemes is done with already known methods for the analysis of linear electric circuits. Private currents obtained by separate calculations gather and are then are determined the sinusoidal searched currents.

4. Bibliography

[1]. Cozma V., Popescu C. – Aparate şi maşini electrice, Ed. SITECH, Craiova, 2007.

[2]. Ghe.Savin,H. Rosman - Circuite Electrice Neliniare şi Parametrice, Editura Tehnică, Bucureşti,1973

[3]. Iustina Zaharia, ş.a. –Bazele Electrotehnicii, Editura Tehnopresss

[4]. Popescu C., ş.a.- Electrotehnică şi maşini electrice, Ed. Sitech, Craiova, 2008

[5]. Popescu C. – Studiul privind circuitele electrice de curent alternativ utilizate în configuraţia isntalaţiilor electrice, Conferinţă de lucrări, noiembrie 2010, Tg-Jiu

[6]. Ţîrcă A., Popescu C., - Îndrumar de Electrotehnică, Ed. Academica Brâncuşi, Tg-Jiu, 2008