

**ANALIZA GRANIȚELOR  
SEMNALELOR DE CONSUM  
ALE MODULATORULUI DELTA-  
SIGMA CU REACȚIA ERORII DE  
CUANTIZARE**

**Juraj Miček**, Universitatea din  
Žilina, Žilina, Republica Slovacă  
**Ján Kapitulík**, Universitatea din  
Žilina, Žilina, Republica Slovacă

**THE ANALYSIS OF INPUT  
SIGNAL BOUNDS OF DELTA-  
SIGMA MODULATOR WITH  
QUANTIZATION ERROR  
FEEDBACK**

**Juraj Miček**, *University of Žilina,  
Žilina, Slovak Republic*  
**Ján Kapitulík**, *University of Žilina,  
Žilina, Slovak Republic*

**REZUMAT:** Articolul se concentrează pe analiza gamei dinamice de consum a modulatorului delta-sigma. Analiza se concentrează pe granițele derivate ale valorilor semnalului de consum pentru care modulatorul este stabil în sensul BIBO (Consum limitat, producție limitată). Caracterul neliniar al blocului de cuantizare este respectat.

**CUVINTE CHEIE:** modulator delta-sigma, stabilitate, gamă, eroare de cuantizare

## 1. INTRODUCERE

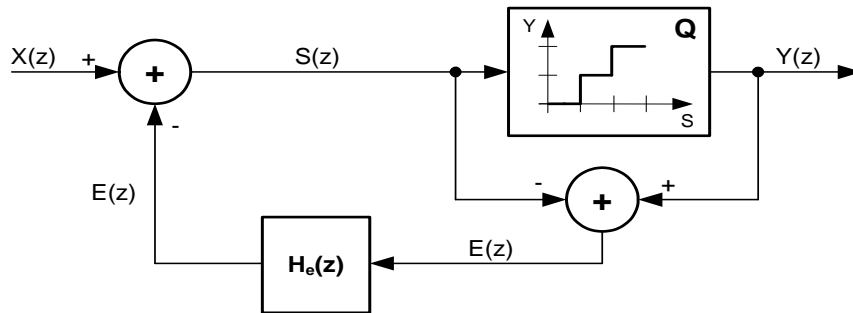
Analiza granițelor semnalului de consum al modulatorului delta-sigma (DSM) se referă îndeaproape la problematica stabilității sale [1], [2], [3]. În scopurile analizei, se consideră structura modulatorului prezentat în figura 1. Semnalul de consum al DSM este reprezentat de simbolul  $x$ , semnalul de consum al cuantizatorului  $Q$  de simbolul  $s$ , semnalul de producție al modulatorului de variabila  $y$  iar eroarea de cuantizare este reprezentată de simbolul  $e$ .  $Q$  reprezintă blocul de cuantizare iar  $H_e$  este funcția de transfer a structurii filtrului FIR, de exemplu, filtrul cu răspuns de impulsuri finite. Funcția de transfer a semnalului este egală cu 1.

**ABSTRACT:** The article is focused on the analysis of input dynamic range of delta-sigma modulator. The analysis is focused on deriving bounds of admissible input signal values for which modulator is stable in BIBO (Bounded Input Bounded Output) sense. Nonlinear character of quantization block is respected.

**KEY WORDS:** delta-sigma modulator, stability, range, quantization error

## 1. INTRODUCTION

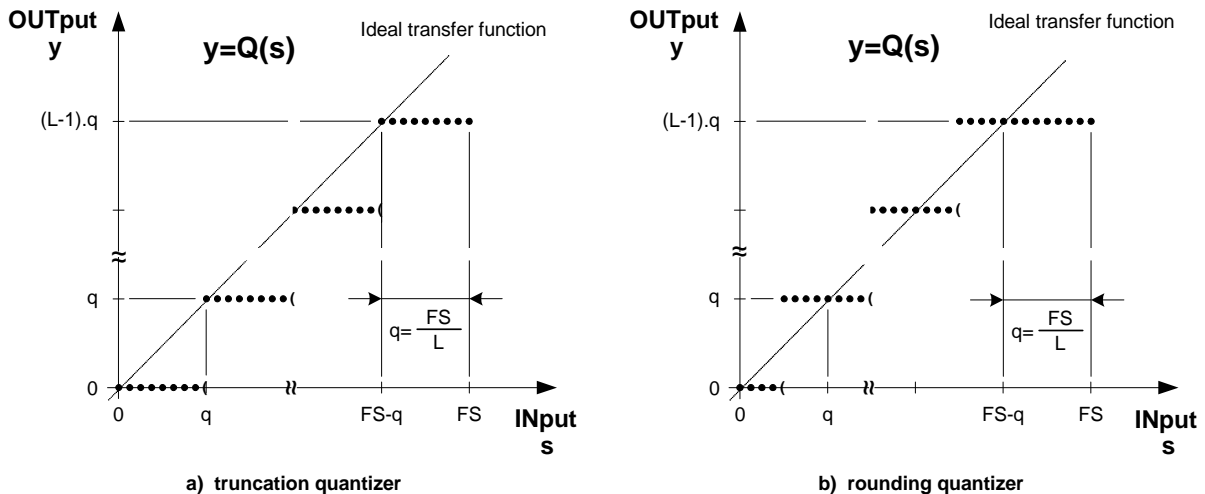
The analysis of input signal bounds of the delta-sigma modulator (DSM) is closely related to problematic of its stability [1], [2], [3]. For the purposes of analysis structure of the modulator showed in figure 1 is considered. Input signal of DSM is represented by symbol  $x$ , input signal of quantizer  $Q$  by symbol  $s$ , output signal of the modulator by variable  $y$  and quantization error is represented by symbol  $e$ .  $Q$  represents quantization block and  $H_e$  is transfer function of FIR filter structure, i.e. filter with finite impulse response. The signal transfer function is equal to 1.



**Figura 1.** O diagramă a blocului de domeniu z a cuantizorului cu reacția erorii  
**Figure 1.** A z-domain block diagram of quantizer with error feedback

Eroarea de cuantizare e se procesează în reacție pentru a minimiza influența lui e asupra semnalului de producție y prin selectarea corectă a funcției de transfer  $H_e(z)$ . Este clar că eroarea de cuantizare care este cunoscută în aplicațiile reale (reziduu după trunchiere sau rotunjire) reacționează la blocul de sustragere via funcția de transfer și este sustrasă de la semnalul de consum. Blocul de cuantizare Q prezentat este unipolar și neliniar. Figura 2 arată caracteristicile de transfer pentru blocul de cuantizare de nivel L unipolar cu trunchiere și respectiv rotunjire.

Quantization error e is processed in feedback in such a way to be minimized influence of e on output signal y by correct selection of transfer function  $H_e(z)$ . It is clear that quantization error which is known in real applications (residue after truncation or rounding) is fed back to subtraction block via transfer function and is subtracted from input signal. Presented quantization block Q is unipolar and nonlinear one. Figure 2 shows transfer characteristics for unipolar L-level quantization block with truncation and rounding, respectively.



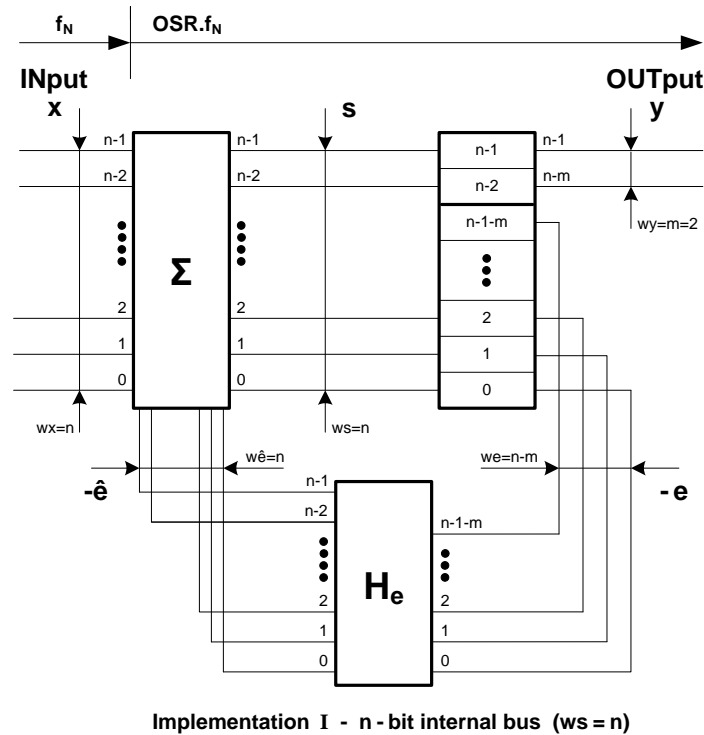
**LEGEND:**

- INput, OUTput - input/output of quantizer Q
- FS - Full-Scale of the quantizer
- $L=2^{wy}$  - number of quantization levels
- wy - word width of output signal y
- $q=FS/L$  - quantization step

**Figura 2.** Funcțiile de transfer pentru cuantizorul Q de nivel L unipolar  
**Figure 2.** Transfer functions for unipolar L-level quantizer Q

Analiza se concentrează pe definirea granițelor de valori ale semnalului de consum admise pentru care DSM este stabil BIBO (consum limitat, producție limitată).

The analysis is focused on defining bounds of admitted input signal values for which DSM is BIBO (Bounded Input Bounded Output) stable.



**LEGEND:** wx - word width of input signal x      we - word width of quantization error e       $f_N$  - Nyquist frequency  
 ws - word width of signal s      wê - word width of predicted quantization error ê      OSR - oversampling ratio  
 wy - word width of output signal y       $H_e$  - a prediction FIR filter

**Figura 3.** Schema de implementare a cuantizorului de trunchiere cu reacția erorii de cuantizare

**Figure 3.** Implementation scheme of truncation quantizer with quantization error feedback

Referitor la cuantizorul unipolar, valoarea minimă a semnalului de consum este egală cu 0 iar valoarea maximă va depinde de schema de implementare DSM. Una dintre posibilele implementări este prezentată în figura 3.

Lărgimea cuvântului (semnalului) de consum x este de n biți și este egală cu lărgimea cuvântului de producție s al viperei. În acest caz, valoarea maximă a semnalului de consum se poate defini prin ecuația:

$$UB_x = 2^n (1 - 2^{-m}) \quad (1)$$

Referring to unipolar quantizer, minimal value of input signal is equal to 0 and maximal value will be depended on DSM implementation scheme. One of possible implementations is presented in figure 3.

The width of input word (signal) x is n bits and is equal to width of output word s of the adder. In this case, maximal value of input signal is possible to define by equation:

$$UB_x = 2^n (1 - 2^{-m}) \quad (1)$$

where: n represents word width of input signal x,

m represents word width of output

unde:  $n$  reprezintă lărgimea cuvântului semnalului de consum  $x$ ,  
 $m$  reprezintă lărgimea cuvântului semnalului de producție  $y$ .

## 2. ANALIZA GRANIȚELOR SEMNALELOR DE CONSUM

### Circuitul de cuantizare cu trunchiere

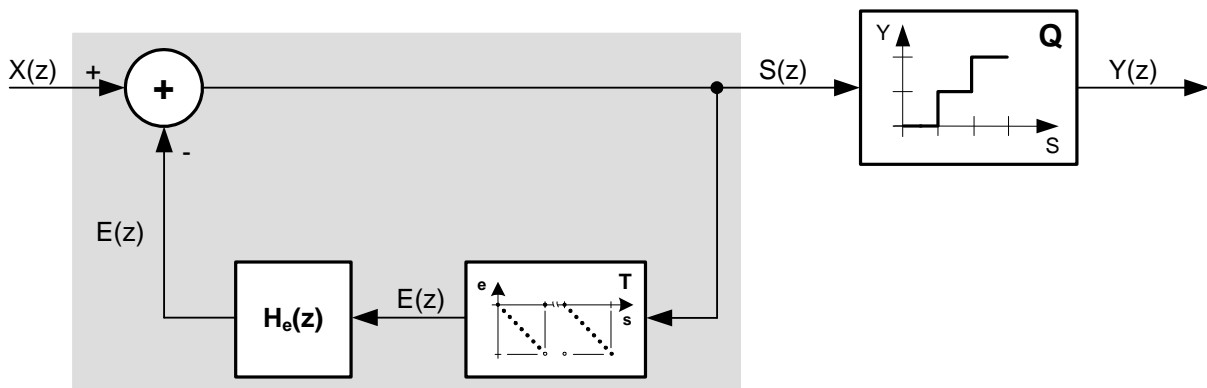
Figura 1 prezintă sistemul care va fi stabil BIBO (răspunsul sistemului la semnalul limitat de consum va fi și el limitat) pentru stabilirea semnalelor de consum (secvența de valori a  $\{x(i)\}$ ) dacă reacția sa ( $H_e(z)$ ,  $T(s)$ ) va fi stabilă, vezi figura 4: fundal gri. Reacția constă în relația liniară  $H_e(z)$  și neliniară  $e=T(s)$ . Blocul neliniar  $T(s)$  nu poate fi liniarizat fără distorsiunea semnificativă a conținutului informației. De aceea, metodele convenționale cunoscute în domeniul sistemului discret liniar sunt problematice pentru judecarea stabilității.

signal  $y$ .

## 2. INPUT SIGNAL BOUNDS ANALYSIS

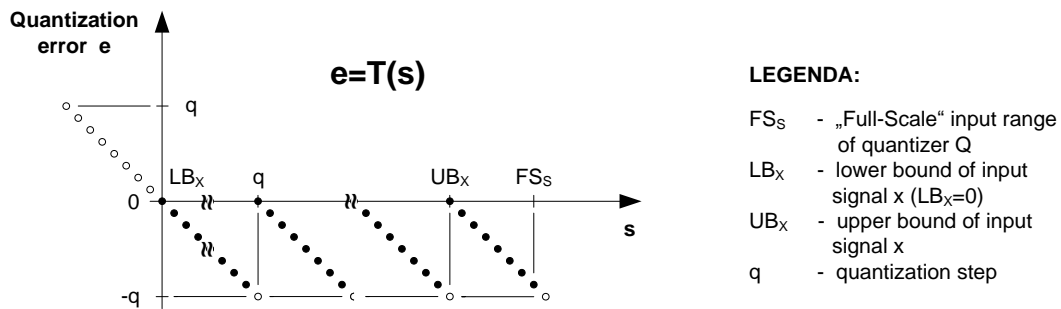
### Quantization circuit with truncation

Figure 1 presents system which will be BIBO stable (system response to bounded input signal will be bounded as well) for set of input signals (values sequence of  $\{x(i)\}$ ) if its feedback ( $H_e(z)$ ,  $T(s)$ ) will be stable, see figure 4: grey background. The feedback consists of linear  $H_e(z)$  and non-linear relation  $e=T(s)$ . Non-linear block  $T(s)$  is not possible to linearized without significant distortion of information content. This is reason why conventional methods known in the field of linear discrete system is problematic to use for stability judging.



**Figura 4.** O diagramă a blocului de domeniu  $z$  a cuantizorului de trunchiere cu neliniaritate în reacția erorii de cuantizare

**Figure 4.** A  $z$ -domain block diagram of truncation quantizer with nonlinearity in quantization error feedback



**Figura 5.** Dependența erorii de cuantizare asupra valorilor semnalului de consum (cuantizorul de trunchiere)

**Figure 5.** Dependency of quantization error on input signal values (truncation quantizer)

Investigarea regiunii de stabilitate se bazează pe următoarele idei:

Modulatorul va fi stabil BIBO dacă, pentru consumul limitat  $\{x(i)\}$  producția  $\{s(i)\}$  va fi limitată, de asemenea. Referitor la relația  $e=T(s)$ , figura 5, putem declara că, dacă toate valorile  $s(i)$  vor satisface condiția:

$$LB_x - \frac{UB_x - LB_x}{L-1} \leq s(i) \leq UB_x + \frac{UB_x - LB_x}{L-1} \quad (2)$$

Atunci valorile producției blocului neliniar  $e(i)=T(s(i))$  vor fi pentru toate  $i$  de la intervalul:

$$\frac{-(UB_x - LB_x)}{L-1} \leq e(i) \leq \frac{UB_x - LB_x}{L-1} \quad (3)$$

Unde  $DR_{IN} = UB_x - LB_x$  este gama circuitului de cuantizare.

Fie ca funcția de transfer a blocului de corecție  $H_e(z)$  să aibă structura FIR, de exemplu:

$$H_e(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \quad (4)$$

Atunci, pentru valorile producției  $\hat{e}(i)$ , putem scrie:

$$\hat{e}(i) = \sum_{k=0}^N a_k e(i-k) \quad (5)$$

Dacă, pentru comportamentul stabil al sistemului se așteaptă respectarea condiției (2), atunci pentru  $e(i)$  va fi valabilă condiția

Investigation of stability region is based on following ideas:

The modulator will be BIBO stable if for bounded input  $\{x(i)\}$  output  $\{s(i)\}$  will be bounded as well. Referring to relation  $e=T(s)$ , figure 5, it is possible to declare that if all values  $s(i)$  will satisfy condition:

$$LB_x - \frac{UB_x - LB_x}{L-1} \leq s(i) \leq UB_x + \frac{UB_x - LB_x}{L-1} \quad (2)$$

than values of output of nonlinear block  $e(i)=T(s(i))$  will be for all  $i$  from the interval:

$$\frac{-(UB_x - LB_x)}{L-1} \leq e(i) \leq \frac{UB_x - LB_x}{L-1} \quad (3)$$

where  $DR_{IN} = UB_x - LB_x$  is range of quantization circuit.

Let transfer function of correction block  $H_e(z)$  has FIR structure, i.e.:

$$H_e(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \quad (4)$$

Then for values of output  $\hat{e}(i)$  is possible to write:

$$\hat{e}(i) = \sum_{k=0}^N a_k e(i-k) \quad (5)$$

If for stable behavior of system is expected respecting of condition (2) than for  $e(i)$  will be valid condition (3) and for  $\hat{e}(i)$  will be achieved next conditions:

(3) iar pentru  $\hat{e}(i)$  se vor îndeplini următoarele condiții:

$$\hat{e}(i) = \sum_{k=0}^N a_k e(i-k) \leq \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \quad (6)$$

$$\hat{e}(i) = \sum_{k=0}^N a_k e(i-k) \geq -\frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k|$$

Referitor la figura 1, este clar că  $s(i) = x(i) - \hat{e}(i)$ . Atunci, pentru  $s(i)$  putem afirma:

$$s(i) \leq x(i) + \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \quad (7)$$

$$s(i) \geq x(i) - \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k|$$

Ideile precedente așteaptă satisfacerea condiției (2) care va fi mereu satisfăcută dacă este valabil:

$$x(i) + \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \leq UB_X + \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (8)$$

$$x(i) - \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \geq LB_X - \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (9)$$

Fie definit intervalul de valori ale semnalului de consum admis  $x(i) \in \langle x_{LB}, x_{UB} \rangle$  cu așteptarea respectării condițiilor (8) și (9). În timp ce valorile semnalului  $x(i)$  vor fi din intervalul  $\langle x_{LB}, x_{UB} \rangle$  și următoarea așteptare este valabilă:

$$x_{UB} + \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \leq UB_X + \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (10)$$

Este clar că inegalitatea  $x(i) \leq x_{UB}$  este valabilă pentru toate  $i$ . Atunci, dacă afirmația (10) este valabilă, aceasta va fi mereu o ecuație valabilă (8).

$$x_{LB} - \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \geq LB_X - \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (11)$$

Pentru că  $x(i) \geq x_{LB}$ , îndeplinind condiția (11) va implica și respectarea condiției (9), comportamentul DSM va fi stabil.

Pentru granițele superioare și inferioare

$$\hat{e}(i) = \sum_{k=0}^N a_k e(i-k) \leq \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \quad (6)$$

$$\hat{e}(i) = \sum_{k=0}^N a_k e(i-k) \geq -\frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k|$$

Referring to figure 1, it is clear that  $s(i) = x(i) - \hat{e}(i)$ . Than, it is possible for  $s(i)$  to state:

$$s(i) \leq x(i) + \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \quad (7)$$

$$s(i) \geq x(i) - \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k|$$

Previous ideas expected satisfaction of condition (2) that will be always satisfied if it is valid:

$$x(i) + \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \leq UB_X + \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (8)$$

$$x(i) - \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \geq LB_X - \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (9)$$

Let it is defined interval of admitted input signal values  $x(i) \in \langle x_{LB}, x_{UB} \rangle$  with expectation of respecting of conditions (8) and (9). While values of signal  $x(i)$  will be from interval  $\langle x_{LB}, x_{UB} \rangle$  and following expectation is valid:

$$x_{UB} + \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \leq UB_X + \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (10)$$

than it is clear that non-equality  $x(i) \leq x_{UB}$  is valid for all  $i$ . Than, if statement (10) is valid, it will be always valid equation (8).

$$x_{LB} - \frac{DR_{IN}}{L-1} \sum_{k=0}^N |a_k| \geq LB_X - \frac{DR_{IN}}{L-1} \quad (11)$$

Because of  $x(i) \geq x_{LB}$ , achieving of condition (11) will imply respecting condition (9) too and behavior of DSM will be stable.

For admitted upper and lower bound of input signal, it is possible to rewrite relations

admise ale semnalului de consum, se pot rescrie relațiile (10) și (11) pentru a forma:

$$x_{UB} = UB_x - \frac{DR_{IN}}{L-1} \left( \sum_{k=0}^N |a_k| - 1 \right) \quad (12)$$

$$x_{LB} = LB_x + \frac{DR_{IN}}{L-1} \left( \sum_{k=0}^N |a_k| - 1 \right) \quad (13)$$

Dacă valorile semnalului de consum  $\{x(i)$ , pentru toate  $i$ , sunt în gama de la  $x_{LB}$  la  $x_{UB}$  atunci sistemul prezentat în figura 1 va fi stabil BIBO. Relațiile (12) și (13) determină granițele semnalului de consum admis și reprezintă condiții satisfăcătoare pentru stabilitatea sistemului.

### Circuitul de cuantizare cu rotunjire

Determinarea regiunii stabile de valori ale semnalului de consum  $\{x(i)\}$  urmează următoarea afirmație. Modulatorul va fi stabil BIBO dacă valorile  $s(i)$ , pentru toate  $i$ , vor aparține gamei de la  $LB_x - (UB_x - LB_x)/2(L-1)$  la  $UB_x + (UB_x - LB_x)/2(L-1)$ , de exemplu, dacă  $s(i)$  este valabil, vezi figura 6:

$$LB_x - \frac{UB_x - LB_x}{2(L-1)} \leq s(i) \leq UB_x + \frac{UB_x - LB_x}{2(L-1)} \quad (14)$$

unde:

$LB_x$  este granița inferioară a

DSM

$UB_x$  este granița superioară a

DSM.

(10) and (11) to form:

$$x_{UB} = UB_x - \frac{DR_{IN}}{L-1} \left( \sum_{k=0}^N |a_k| - 1 \right) \quad (12)$$

$$x_{LB} = LB_x + \frac{DR_{IN}}{L-1} \left( \sum_{k=0}^N |a_k| - 1 \right) \quad (13)$$

If values of input signal  $\{x(i)$ , for all  $i$ , is in the range from  $x_{LB}$  to  $x_{UB}$  than system shown in figure 1 will be BIBO stable. Relations (12) and (13) determine bounds of admitted input signal and represent satisfactory conditions of system stability.

### Quantization circuit with rounding

Determination of stable region of input signal values  $\{x(i)\}$  follows next statement. The modulator will be BIBO stable if values  $s(i)$ , for all  $i$ , will belong to range from  $LB_x - (UB_x - LB_x)/2(L-1)$  to  $UB_x + (UB_x - LB_x)/2(L-1)$ , i.e. for  $s(i)$  is valid, see figure 6:

$$LB_x - \frac{UB_x - LB_x}{2(L-1)} \leq s(i) \leq UB_x + \frac{UB_x - LB_x}{2(L-1)}$$

where:

$LB_x$  is lower bound of DSM

$UB_x$  is upper bound of DSM.

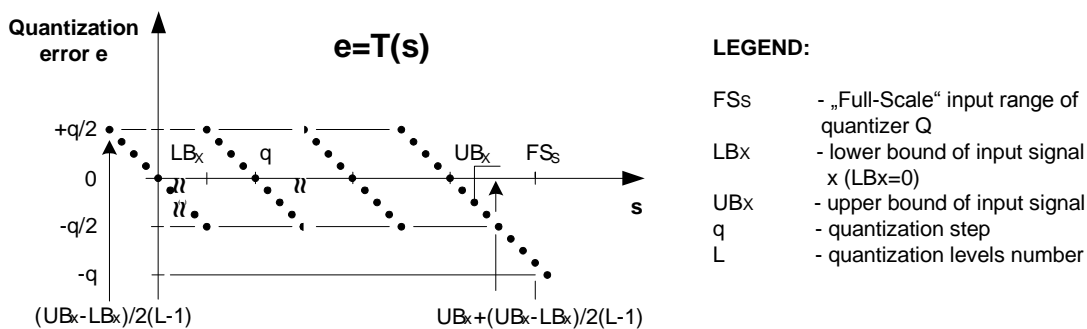


Figure 6. Dependenta erorii de cuantizare asupra valorii semnalului de consum (cuantizorul de rotunjire)

Figure 6. Dependency of quantization error on value of input signal (rounding quantizer)

Analog, ca și în cazul precedent, putem dovedi că pentru granița inferioară  $x_{LB}$  și superioară  $x_{UB}$  a gamei admise de valori ale semnalului de consum, este valabil  $DR_x$ :

$$x_{UB} = UB_x + \frac{DR_{IN}}{2(L-1)} \left( 1 - \sum_{k=0}^N |a_k| \right) \quad (15)$$

$$x_{LB} = LB_x - \frac{DR_{IN}}{2(L-1)} \left( 1 - \sum_{k=0}^N |a_k| \right)$$

unde:

$UB_x$  este granița superioară a semnalului de consum  $x$ ,  
 $LB_x$  este granița inferioară a semnalului de consum  $x$ ,  
 $DR_{IN}$  este gama cuantizorului  $Q$ ,  
 $a_k$  sunt coeficienții funcției de transfer FIR  $H_c(z)$ ,  
 $L$  este numărul nivelurilor de cuantizare,  
 $x_{LB}$  este granița inferioară a valorilor semnalului de consum  $x$  pentru care sistemul are un comportament stabil,  
 $x_{UB}$  este granița superioară a valorilor semnalului de consum  $x$  pentru care sistemul are un comportament stabil.

*Dacă valorile semnalului de consum  $\{x(i)\}$  sunt, pentru toate  $i$ , în gama de la  $x_{LB}$  la  $x_{UB}$ , atunci sistemul din figura 1 va fi stabil BIBO. Relațiile (15) determină granițele de valori ale semnalului de consum admis și reprezintă condiții satisfăcătoare ale stabilității sistemului cu funcția de transfer din figura 2b.*

#### 4. CONCLUZIE

Articolul acoperă problematică stabilității modulatorului delta-sigma. Analiza profundă a granițelor admise ale valorilor semnalului de consum ale modulatorului, ca și cuantizorului, este prezentată în documentul care include determinarea granițelor superioare și inferioare și valorile la care modulatorul este stabil. Circuitul de

Analogically as in previous case, it is possible to proof that for lower  $x_{LB}$  and upper  $x_{UB}$  bound of admitted range of input signal values  $DR_x$  is valid:

$$x_{UB} = UB_x + \frac{DR_{IN}}{2(L-1)} \left( 1 - \sum_{k=0}^N |a_k| \right) \quad (15)$$

$$x_{LB} = LB_x - \frac{DR_{IN}}{2(L-1)} \left( 1 - \sum_{k=0}^N |a_k| \right) ,$$

where:

$UB_x$  is upper bound of input signal  $x$ ,  
 $LB_x$  is lower bound of input signal  $x$ ,  
 $DR_{IN}$  is range of quantizer  $Q$ ,  
 $a_k$  are coefficients of FIR transfer function  $H_c(z)$ ,  
 $L$  is number of quantization levels,  
 $x_{LB}$  is lower bound of input signal  $x$  values for which system has stable behavior,  
 $x_{UB}$  is upper bound of input signal  $x$  values for which system has stable behavior.

*If input signal values  $\{x(i)\}$  are, for all  $i$ , in range from  $x_{LB}$  to  $x_{UB}$ , than system from figure 1 will be BIBO stable. Relations (15) determine bounds of admitted input signal values and represents satisfactory conditions of system stability with transfer function from figure 2b.*

#### 4. CONCLUSION

The article covers delta-sigma modulator stability problematic. Deep analysis of admitted bounds of input signal values of the modulator as well as quantizer is presented in the paper including determination of upper and lower bounds and values under which modulator is stable. Quantization circuit with truncation as well as rounding with quantization error feedback



cuantizare cu trunchiere, ca și rotunjirea cu reacția erorii de cuantizare, sunt analizate, de asemenea, [4]. Expresiile matematice pentru verificarea rezultatelor analizei sunt prezentate într-o manieră clară.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] J. G. Proakis, Dimitris G. Manolakis: Procesarea semnalului digital: principii, algoritmi și aplicații, ediția a 4-a, ISBN 0-13-187374-1, 2007 Editura Macmillan
- [2] R. Schreier, G.C. Temes: Înțelegerea convertorilor de date Delta-Sigma, ISBN 0-471-46585-2, 2005
- [3] Ian Galton: Formarea zgomotului D/A convertori pentru modulația  $\Delta\Sigma$ , IEEE Simpozionul internațional privind circuitele și sistemele, 1996
- [4] J. Miček, J. Juríček: Šum v systémech spracovania signálov, EDIS 2009

is analyzed too, [4]. Mathematical expressions for verification analysis results are presented in clear manner.

## REFERENCES

- [1] J. G. Proakis, Dimitris G. Manolakis: Digital Signal Processing: principles, algorithms and applications, 4<sup>th</sup> ed., ISBN 0-13-187374-1, 2007 Macmillan Publishing Company
- [2] R. Schreier, G.C. Temes: Understanding Delta-Sigma Data Converters, ISBN 0-471-46585-2, 2005
- [3] Ian Galton: Noise-Shaping D/A Converters for  $\Delta\Sigma$  modulation, IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1996
- [4] J. Miček, J. Juríček: Šum v systémech spracovania signálov, EDIS 2009