

## MODELAREA MATEMATICĂ A PROCESULUI “BALL ON BEAM”

**Popescu Ion Marian**, Șef.Lucr.dr.ing.,  
Universitatea “Cosntantin Brâncuși” din  
Târgu-Jiu

**ABSTRACT:** În această lucrare se prezintă dezvoltarea unui model matematic ce aproximează cu un grad ridicat de precizie procesul real “Ball on Beam”. Această dezvoltare va fi utilă în proiectarea și implementarea unui sistem de control a procesului real, plecând de la realizarea practică a părții mecanice, a sistemului de achiziție și comenzi, a modelării procesului și proiectarea structurii și algoritmului de reglare.

### 1.Descrierea structurii procesului “Ball on Beam”

Sistemul “Ball on Beam” este caracterizat de mișcarea liberă a unei bile pe o bară, în scopul implementării unui sistem de control al poziției, ce are structura mecanică prezentată în Fig.1. Mișcarea este inițiată de balansarea barei cu ajutorul unui motor de curent continuu, plasat la un capăt al barei, celălalt capăt al barei fiind fix, cu rol de compensare a poziției bilei.

unde:  $m = 0.052[kg]$  -Masa bilei

$V_t$  -Viteza de translație a bilei de-a lungul barei

$\omega$  -Viteza unghiulară de rotație a bilei în jurul propriului centru

$\alpha$  -Unghiul dintre bară și orizontală

$I_B = 0.000004212 [kg \cdot m^2]$  -Momentul de inerție a bilei în mișcare de rotație față de centrul propriu

$I_A = 0.054[kg \cdot m^2]$  -Momentul de inerție a barei față de punctul de sprijin O

$l$  -Distanța dintre poziția bilei și pivotul fix(punctul O)

$L = 0.5[m]$  -Lungimea barei(tije)

$B = 0.05[m]$  -Lungimea brațului realizat de

## MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS “BALL ON BEAM”

**Popescu Ion Marian**, Lecturer PhD. Eng.  
University “Cosntantin Brâncuși” of Târgu-  
Jiu

**ABSTRACT:** This paper presents the development of a mathematical model that approximates with a high precision the real process "Ball on Beam". This development will be useful in designing and implementing a real process control system, based on the realization of the mechanical part, the data acquisition system and control, process modeling and design the structure of a control algorithm.

### 1. Description of process structure "Ball on Beam"

The process "Ball on Beam" is characterized by free movement of a ball on a beam, with purpose to implement a position control system, and the mechanical structure is shown in Fig.1. Movement is initiated by balancing the bar with a DC motor, placed at one end of the beam, the other end of the beam is fixed, What is the role of compensation the ball position.

where:  $m = 0.052[kg]$  -Mass of ball

$V_t$  - Translational speed of the ball over the beam

$\omega$  - Angular velocity of rotation around its own center of the ball

$\alpha$  - The angle between the horizontal position and beam

$I_B = 0.000004212 [kg \cdot m^2]$  - Moment of inertia of the rotating ball to its center

$I_A = 0.054[kg \cdot m^2]$  - The moment of inertia reported to the fulcrum bar O

$l$  - The distance between the ball and pivot fixed position (point O)

$L = 0.5[m]$  - Length of the beam

$B = 0.05[m]$  - Arm length made the motor

volanta atașată motorului  
 $\beta$  -Unghiul de rotație la axul motorului  
 $R = 0.009[m]$  -Raza de rostogolire a bilei  
 rezemată pe tijă (prezentată în Fig.2)

flywheel  
 $\beta$  - Motor shaft rotation angle  
 $R = 0.009[m]$  - Rolling radius of the ball  
 leaning on the beam (shown in Fig.2)

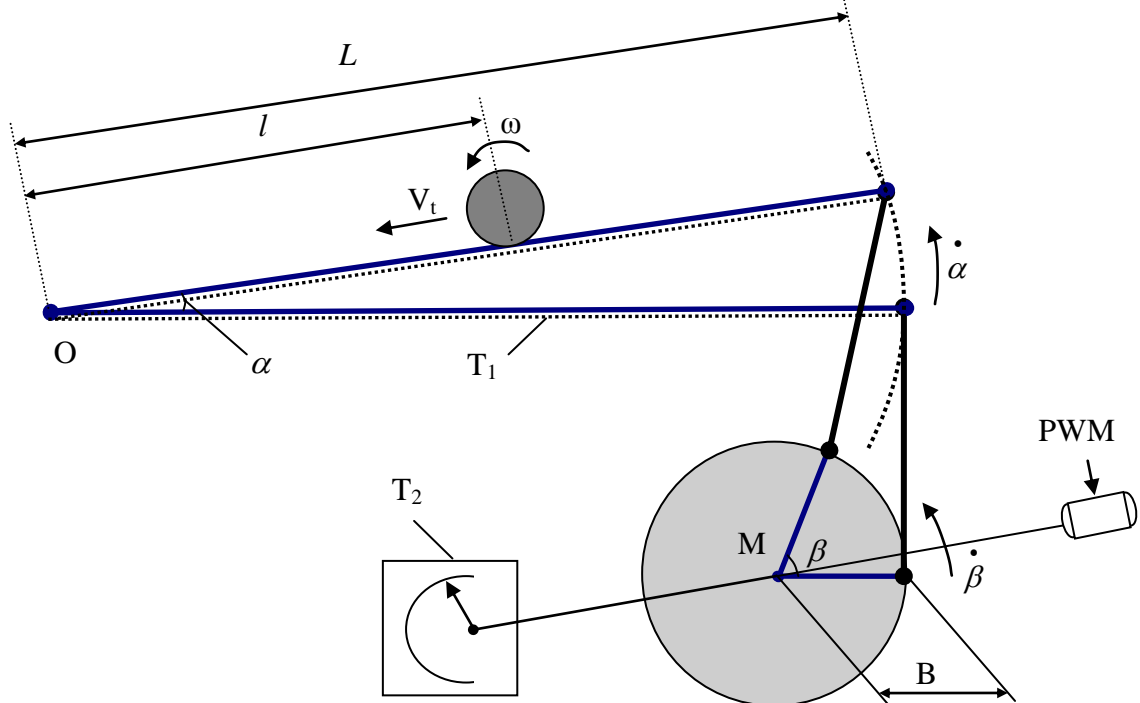


Fig.1. Structura mecanică a sistemului “Ball on Beam”  
 Fig.1. The mechanical structure of “Ball on Beam”

Sistemul are un traductor potențiomtric  $T_1$  de-a lungul barei, care va furniza poziția bilei (poziția  $l$ ), și un alt traductor potențiomtric  $T_2$  plasat chiar pe axul motorului care va furniza poziția unghiulară a axului motorului (unghiul  $\beta$ ), unghi care va fi transformat în unghiul format de tijă cu orizontala (unghiul  $\alpha$ ). Tot pe axul motorului este plasată și o volantă (disc) cu scopul de a crea un braț de acționare pentru bară. O rotire a axului motorului cu unghiul  $\beta$ , va roti bara de lungime  $L$  în jurul pivotului  $O$  cu unghiul  $\alpha$ . Vârful brațului care se formează pe discul legat la axul motorului și vârful barei  $L$ , sunt legate rigid și parcurg aceeași lungime de arc, dar pe 2 cercuri de rază diferită. Legătura dintre unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  poate fi considerată

ca fiind liniară sub forma:  $\alpha = \frac{B}{L}\beta$  (1)

Sprijinirea bilei se realizează pe 2 bare

The system has a potentiometric transducer ( $T_1$ ) along to the beam, which will provide ball position (position  $l$ ), and another potentiometric transducer ( $T_2$ ) placed directly on the motor shaft, which will provide the motor shaft angular position (angle  $\beta$ ), which will be transformed into the horizontal beam angle (angle  $\alpha$ ). Also on the motor shaft is placed and a flywheel (disk) with the purpose of create an actuator arm bar. A motor shaft rotation angle  $\beta$ , will rotate the beam around the pivot  $O$  with  $\alpha$  angle. The peak arm, which is formed on the disk connected to the motor shaft and the top bar  $L$ , are connected rigidly and go through the same length of arc, but the two circles of different radius. The relationship between  $\alpha$  and  $\beta$  angles can be

considered to be linear as:  $\alpha = \frac{B}{L}\beta$  (1)

paralele, depărtate una de cealaltă, iar poziția bilei va fi dată de un traductor potențiomtric format de sistemul celor 2 bare și bilă, ca în Fig2.

Supporting the ball done on two parallel bars, far from each other, and ball position will be given by a potentiometric sensor, the system composed of two bars and ball, as in Fig2.

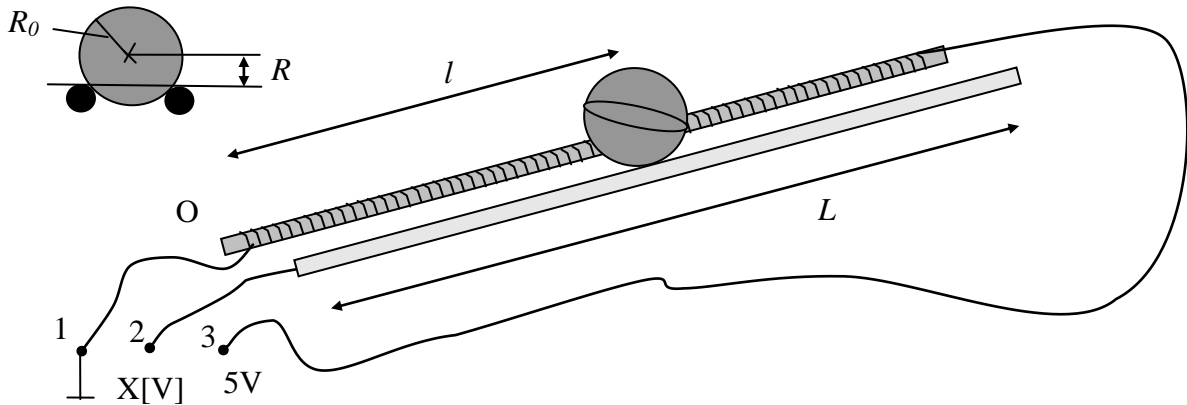


Fig.2.Traductorul potențiomtric pentru măsurarea poziției bilei  
Fig.2. Potentiometric transducer to measure ball position

Conductorul de nichelină(al barei filetate) este legat la bornele 1 și 3 și alimentat cu o tensiune de 5V, iar la borna 2 se măsoară o tensiune proporțională cu deplasarea bilei  $l$  de-a lungul barelor față de pivotul fix O.

Nichelina conductor (the threaded rod) is connected to terminals 1 and 3 and supplied with a voltage of 5V, and the terminal 2 is measuring a voltage proportional to the displacement of the ball along it bars fixed to the pivot O.

## 2.Modelarea procesului “Ball on Beam”

## 2. Modeling the process "Ball on Beam"

În abordarea Lagrangeană a elaborării ecuațiilor de mișcare[1], [2], [3] vom considera energia cinetică pentru sistemul din Fig.1 dată de următoarea relație:

The Lagrangean approach to develop equations of motion [1], [2], [3] we consider the system of Fig.1 kinetic energy given by the relation:

$$T = E_0 + E_1 + E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_B\omega^2 + \frac{1}{2}I_A\dot{\alpha}^2 \quad (2)$$

Prima componentă a energiei cinetice este dată de viteza bilei  $v$ , ce are 2 componente,  $v_t$ -viteza de translație de-a lungul barei și  $v_c$ -viteza datorată rotației barei în jurul pivotului O, ca în Fig.3

The first component of kinetic energy is given ball speed  $v$ , which has two components:  $v_t$ -translational velocity along the bar and  $v_c$ -bar speed due to rotation around a pivot O, as in Fig.3

Mișcarea bilei se poate considera într-un singur plan XOY, și vom aproxima mișcarea

Ball movement can be considered in a single plane XOY, and we approximate the motion in

în coordonate polare: 
$$\begin{cases} x = l \cos \alpha \\ y = l \sin \alpha \end{cases}$$

polar coordinates: 
$$\begin{cases} x = l \cos \alpha \\ y = l \sin \alpha \end{cases}$$
 is the

reprezintă poziția centrului de masă al bilei  
Viteza de mișcare pe cele 2 axe este:

mass center position of the ball  
Speed of movement on the two axes is:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{l} \cos \alpha - l \dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{y} = \dot{l} \sin \alpha + l \dot{\alpha} \cos \alpha \end{cases} \quad (3)$$

Expresia energiei cinetice a vitezei bilei este: Ball velocity kinetic energy expression is:

$$E_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Din relația (3) avem:

From equation (3) we have:

$$\begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{l}^2 \cos^2 \alpha + l^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha - 2l\dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{y}^2 = \dot{l}^2 \sin^2 \alpha + l^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + 2l\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Adunând cele 2 relații anterioare, vom avea: Adding the two previous relationships, we have:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{l}^2 + (l\dot{\alpha})^2 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + (l\dot{\alpha})^2) \quad (5)$$

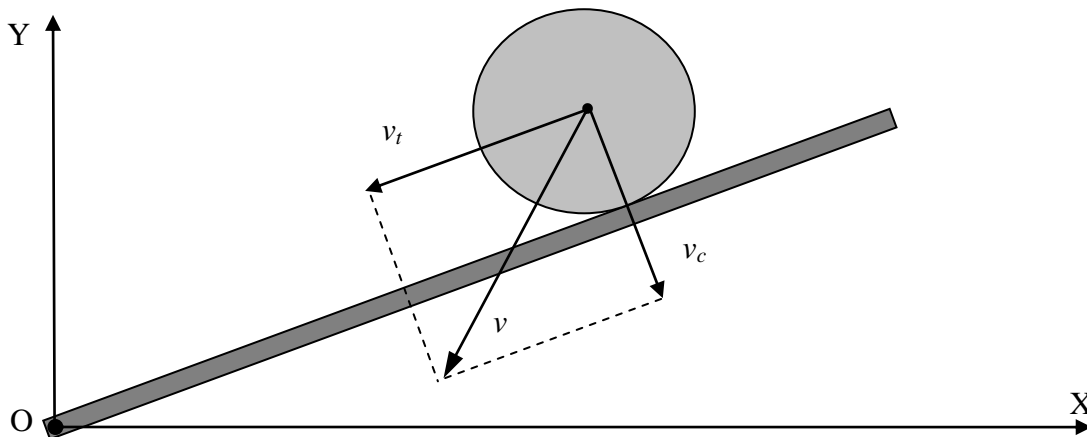


Fig.3. Componerea vitezelor pentru mișcarea bilei  
Fig.3. The composition of velocities for motion ball

Energia cinetică de rotație a bilei va fi The kinetic energy of rotation of the ball will be  $E_1 = \frac{1}{2} I_B \omega^2$ , dar viteza unghiulară a bilei

are 2 componente:  $\omega_1 = \frac{v_t}{R} = \frac{\dot{l}}{R}$  datorată ball has two components:  $\omega_1 = \frac{v_t}{R} = \frac{\dot{l}}{R}$  due to

propriei rotații a bilei, și alta datorată rotației their rotation of the ball, and another due to

barei în jurul pivotului fix  $\omega_2 = \dot{\alpha}$ . Datorită rotation around the pivot arm fixed  $\omega_2 = \dot{\alpha}$ . Because the ball moving route consists of two

faptului că traseul pe care se mișcă bila este beams that in Fig.2, we consider the ball rolling radius  $R$  and not  $R_0$  moving. Thus we have the full motion rotation angular

formație a bilei viteza unghiulară velocity of the ball  $\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{\dot{l}}{R} + \dot{\alpha}$ .

$$\Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} I_B \omega^2 = \frac{1}{2} I_B \left( \frac{\dot{l}}{R} + \dot{\alpha} \right)^2 \quad (6)$$

Energia cinetică de rotație a barei este:

The kinetic energy of rotation of the bar is:

$$E_2 = \frac{1}{2} I_A (\dot{\alpha})^2 \quad (7)$$

Din relațiile (5), (6), (7) avem:

From relations (5), (6), (7) we have:

$$T = E_0 + E_1 + E_2 = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + (l\dot{\alpha})^2) + \frac{1}{2} I_B \left( \frac{\dot{l}}{R} + \dot{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} I_A (\dot{\alpha})^2$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} I_B \left( \frac{\dot{l}^2}{R^2} + \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{R} \dot{l} \dot{\alpha} \right) + \frac{1}{2} I_A (\dot{\alpha})^2 \quad (8)$$

Lagrangeanul pentru întreg sistemul considerând forțe conservative este:  $L = T - V$  unde  $V$  este energia potențială în câmp de forțe conservative (s-a neglijat masa barei), și considerând nivelul de referință pentru energia potențială bara în poziție orizontală, vom avea:

The lagrangean for the whole system considering conservative forces is:  $L = T - V$  where  $V$  is the potential energy of conservative force field (arm mass was neglected), and considering the potential energy reference horizontal bar, we have:

$$V = mgl \sin \alpha \quad (9)$$

Astfel, Lagrangeanul sistemului devine:

Thus, The lagrangean system becomes:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} I_B \left( \frac{\dot{l}^2}{R^2} + \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{R} \dot{l} \dot{\alpha} \right) + \frac{1}{2} I_A (\dot{\alpha})^2 - mgl \sin \alpha \quad (10)$$

Ecuția Lagrange este:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

The lagrange equation is:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

O formă echivalentă a acestei ecuații este:

An equivalent form of this equation is:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (11)$$

unde  $q_i$  cu  $i=1..n$  sunt un sistem de coordonate generalizate, iar  $Q_i$  sunt forțele neconservative ce acționează în acest sistem. Astfel, prima ecuație de mișcare, în raport cu coordonata  $l$  este:

where  $q_i$  with  $i=1..n$  is a generalized coordinate system, and  $Q_i$  are nonconservative forces acting on the system. Thus, the first equation of motion in relation with  $l$  is:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} \right) - \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \quad (12)$$

Astfel, am considerat că de-a lungul tijei (adică coordonata generalizată  $l$ ) acționează doar componenta longitudinală a greutății bilei și am neglijat forța de frecare la rostogolire între bilă și tijă, forța de frecare vâscoasă între aer și bilă și eventual alte forțe care vor fi considerate în categoria perturbații ce acționează asupra sistemului. În continuare vom avea:

Thus, we considered that along the beam (ie generalized coordinate  $l$ ) acts only longitudinal component of the ball weight and have neglected the rolling friction between the ball and beam, viscous friction between air and the ball and possibly other forces that will be considered in the category of disturbances acting on the system. Next we have:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} I_B \left( \frac{\dot{l}^2}{R^2} + \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{R} \dot{l} \dot{\alpha} \right) + \frac{1}{2} I_A (\dot{\alpha})^2 - mgl \sin \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = ml\dot{\alpha}^2 - mg \sin \alpha \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m\dot{l} + \frac{I_B}{R^2}\dot{l} + \frac{I_B}{R}\dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right) = m\ddot{l} + \frac{I_B}{R^2}\ddot{l} + \frac{I_B}{R}\ddot{\alpha} \quad (14)$$

Introducând relațiile (13), (14) în relația (12) prima ecuație de mișcare devine:

$$\ddot{l}\left(m + \frac{I_B}{R^2}\right) + \frac{I_B}{R}\ddot{\alpha} - ml\dot{\alpha}^2 + mg \sin \alpha = 0 \quad (15)$$

A doua ecuație de mișcare, în raport cu coordonata  $\alpha$  este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau \quad (16)$$

unde  $\tau = \tau_m - \tau_r$  este cuplul rezultant exercitat de motor pentru acționarea brațului și este compus din  $\tau_m$ -cuplul motor și  $\tau_r$  cuplul reductorului+frecările statice și dinamice din reductor. Variația în raport cu cealaltă variabilă generalizată  $\alpha$  va fi:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2}I_B\left(\frac{\dot{l}^2}{R^2} + \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{R}\dot{l}\dot{\alpha}\right) + \frac{1}{2}I_A(\dot{\alpha})^2 - mgl \sin \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -mgl \cos \alpha \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m\dot{\alpha}l^2 + I_B\dot{\alpha} + \frac{I_B}{R}\dot{l} + I_A\dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) = m\ddot{\alpha}l^2 + 2ml\dot{\alpha} + I_B\ddot{\alpha} + \frac{I_B}{R}\ddot{l} + I_A\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}(ml^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R}\ddot{l} + 2ml\dot{\alpha} \quad (18)$$

Introducând relațiile (17), (18) în relația (16), a doua ecuație de mișcare devine:

$$\ddot{\alpha}(ml^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R}\ddot{l} + 2ml\dot{\alpha} + mgl \cos \alpha = \tau_m - \tau_r \quad (19)$$

Astfel, relațiile (15),(19) reprezintă ecuațiile neliniare de mișcare, în coordonate polare:

$$\begin{cases} \ddot{l}\left(m + \frac{I_B}{R^2}\right) + \frac{I_B}{R}\ddot{\alpha} - ml\dot{\alpha}^2 + mg \sin \alpha = 0 \\ \ddot{\alpha}(ml^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R}\ddot{l} + 2ml\dot{\alpha} + mgl \cos \alpha = \tau_m - \tau_r \end{cases} \quad (20)$$

Bara pe care se rostogolește bila este acționată la un capăt de un motor de curent continuu ce este alimentat cu o tensiune modulată PWM ca în Fig.4. Tensiunea de

Introducing relations (13), (14) into (12) the first equation of motion becomes:

The second equation of motion relative to the coordinate  $\alpha$  is:

where  $\tau = \tau_m - \tau_r$  is the resulting torque exercised by the motor for operating arm and is composed of  $\tau_m$ -motor torque and  $\tau_r$ -reductor torque, plus static and dynamic friction in the reductor. Variation in relation to other generalized variable  $\alpha$  will be:

Introducing relations (17), (18) into (16), the second equation of motion becomes:

Thus, relations (15), (19) are nonlinear equations of motion in polar coordinates:

The beam is actuated at one end by a DC motor that is powered by a voltage modulated PWM as in Fig.4. Voltage of the motor  $V_m$  can be considered to

alimentare a motorului  $V_m$  poate fi considerată ca fiind  $V_m = K_u \cdot U = K_u \cdot 12V$ . Practic, comanda primită de la sistemul de achiziție și comandă, este  $u = 12 \cdot K_u = V_m$  care este transformată în tensiune de alimentare a motorului în domeniul  $-12V \dots 12V$ . Aplicând legile lui Kirchoff avem:

$$V_m = I_a R_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + E_b \quad (21)$$

unde:  $I_a$ -curentul în înfășurarea rotorică;  $R_a$ -rezistența înfășurării rotorice;  $L_a$ -inductanța înfășurării rotorice;  $E_b$ -tensiunea contraelectromotoare

Tensiunea contraelectromotoare  $E_b$  este proporțională cu viteza de schimbare a fluxului electromagnetic și astfel este proporțională cu viteza unghiulară a motorului, unde ținem cont și de relația (1):

$$E_b = K_b \frac{d\beta}{dt} = K_b \dot{\beta} = \frac{K_b L}{B} \dot{\alpha} \quad (22)$$

unde  $K_b$  - este constanta electromagnetică a motorului

be  $V_m = K_u \cdot U = K_u \cdot 12V$ .

Basically, the command received from acquisition and control system, is  $u = 12 \cdot K_u = V_m$  and it is converted into DC voltage to motor in the domain  $-12V \dots 12V$ .

Applying Kirchoff's laws we have:

where:  $I_a$  -current in the rotor winding;  $R_a$  - rotor winding resistance;  $L_a$  -inductance of rotor winding;  $E_b$  - for-electromotive tension

For-electromotive tension  $E_b$  is proportional to the rate of change of electromagnetic flow and thus is proportional to the angular velocity of the engine, which take into account the relation (1):

where  $K_b$  - is electromagnetic constant of the motor

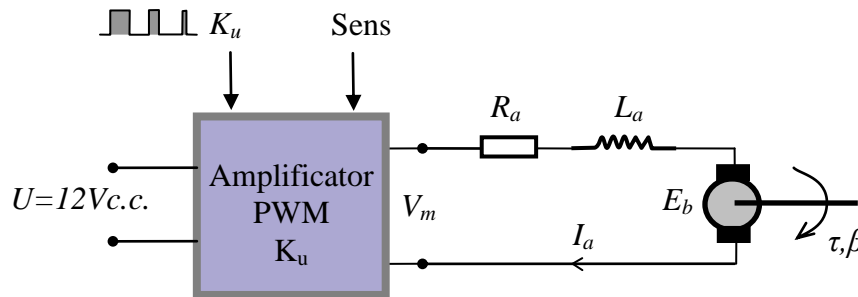


Fig.4. Structura sistemului de acționare

Fig.4. The structure of the actuation

În condițiile în care curentul este constant, cuplul exercitat de motor  $\tau_m$  este direct proporțional cu curentul prin înfășurare:

$$\tau_m = K_t I_a \quad (23)$$

unde  $K_t$  - este constanta de cuplu a motorului. Presupunând că efectul inductanței înfășurării rotorice  $L_a$  este neglijabil, cuplul poate fi scris:

$$\tau_m = K_t \frac{V_m - E_b}{R_a} = \frac{K_t}{R_a} V_m - \frac{K_t K_b L}{R_a B} \dot{\alpha} \quad (24)$$

If we consider the constant current, the torque motor  $\tau_m$  is directly proportional to current through the motor winding:

$$\tau_m = K_t I_a \quad (23)$$

where  $K_t$  - constant engine torque

Assuming that the rotor winding inductance effect  $L_a$  is negligible, the couple can be written:

În relația (24),  $u = V_m$  este mărime de comandă pentru sistemul “Ball on Beam” și vom avea:

$$\tau_m = \frac{K_t}{R_a} u - \frac{K_t K_b L}{R_a B} \dot{\alpha} \quad (25)$$

Introducând relația (25) în relația (20), obținem ecuațiile neliniare de mișcare a sistemului:

$$\begin{cases} \ddot{l} \left( m + \frac{I_B}{R^2} \right) + \frac{I_B}{R} \ddot{\alpha} - ml \dot{\alpha}^2 + mg \sin \alpha = 0 \\ \ddot{\alpha} (ml^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R} \ddot{l} + 2ml \dot{l} \dot{\alpha} + mgl \cos \alpha = \frac{K_t}{R_a} u - \frac{K_t K_b L}{R_a B} \dot{\alpha} - \tau_r \end{cases} \quad (26)$$

Considerând bila în jurul unei poziții de echilibru, bara trebuie să fie “aproximativ” orizontală, ceea ce înseamnă că unghiul  $\alpha$  este foarte mic și astfel putem face aproximarea  $\sin \alpha = \alpha$  și  $\cos \alpha \approx 1$ . Ecuațiile (26) devin:

$$\begin{cases} \ddot{l} \left( m + \frac{I_B}{R^2} \right) + \frac{I_B}{R} \ddot{\alpha} - ml \dot{\alpha}^2 + mg \alpha = 0 \\ \ddot{\alpha} (ml^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R} \ddot{l} + 2ml \dot{l} \dot{\alpha} + mgl = \frac{K_t}{R_a} u - \frac{K_t K_b L}{R_a B} \dot{\alpha} - \tau_r \end{cases} \quad (27)$$

În continuare, considerăm un punct staționar de echilibru al bilei caracterizat de poziția acesteia pe bară  $l_0$  care este chiar poziția în care se dorește a fi poziționată bila, adică  $l_0 = l_{ref}$ , și unghiul barei  $\alpha_0$  care are valoarea  $\alpha_0 = 0$  în cazul în care bila este în echilibru. Vom considera variații mici în jurul acestor puncte staționare, de forma:

$$\begin{cases} l(t) = l_0 + \Delta l(t) \\ \alpha(t) = \alpha_0 + \Delta \alpha(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l(t) = l_0 + \Delta l(t) \\ \alpha(t) = \Delta \alpha(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{l}(t) = \Delta \dot{l}(t) \\ \dot{\alpha}(t) = \Delta \dot{\alpha}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{l}(t) = \Delta \ddot{l}(t) \\ \ddot{\alpha}(t) = \Delta \ddot{\alpha}(t) \end{cases} \quad (28)$$

Sistemul (27) devine:

$$\begin{cases} \Delta \ddot{l} \left( m + \frac{I_B}{R^2} \right) + \frac{I_B}{R} \Delta \ddot{\alpha} - ml (\Delta \dot{\alpha})^2 + mg \Delta \alpha = 0 \\ \Delta \ddot{\alpha} (ml_0^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R} \Delta \ddot{l} + 2m(l_0 + \Delta l) \Delta \dot{l} \dot{\alpha} + mg(l_0 + \Delta l) = \frac{K_t}{R_a} u - \frac{K_t K_b L}{R_a B} \Delta \dot{\alpha} - \tau_r \end{cases} \quad (29)$$

În relația (29), vom neglija produse de forma:  $\Delta(\cdot) \times \Delta(\cdot)$

In (24),  $u = V_m$  is the control signal for the "Ball on Beam" and we have:

Introducing relation (25) into (20), we obtain nonlinear equations of motion for the system:

Considering ball around an equilibrium position, the beam must be "approximately" horizontal, which means that the angle  $\alpha$  is very small and thus we can approximate  $\sin \alpha = \alpha$  and  $\cos \alpha \approx 1$ . Equations (26) becomes:

Next, consider a stationary equilibrium point characterized by its position the ball on the beam  $l_0$  is really position the ball is intended to be positioned, ie  $l_0 = l_{ref}$ , and beam angle  $\alpha_0$  that is equivalent to  $\alpha_0 = 0$  if the ball is in equilibrium .

We consider small variations around these stationary points of the form:

The system (27) becomes:

In (29), we neglect the products of the form:  $\Delta(\cdot) \times \Delta(\cdot)$



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \ddot{l} \left( m + \frac{I_B}{R^2} \right) + \frac{I_B}{R} \Delta \ddot{\alpha} + mg \Delta \alpha = 0 \\ \Delta \ddot{\alpha} (ml_0^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R} \Delta \ddot{l} + mg \Delta l + mgl_0 = \frac{K_t}{R_a} u - \frac{K_t K_b L}{R_a B} \Delta \dot{\alpha} - \tau_r \end{array} \right. \quad (30)$$

În ecuația a doua din relația (30), dacă considerăm un punct de regim staționar caracterizat de comanda la motor  $u=0$ , bara în poziție orizontală  $\Rightarrow \Delta\alpha=0; \Delta\dot{\alpha}=0; \Delta\ddot{\alpha}=0$ , bila la distanța  $l_0$  față de pivot  $\Rightarrow \Delta l=0; \Delta\dot{l}=0; \Delta\ddot{l}=0$ , obținem ecuația de regim staționar  $mgl_0 = -\tau_r$ . Această situație corespunde pe deplin cu sistemul real, în sensul că în momentul stabilizării bilei în poziția dorită este nevoie de comandă  $u=0$  la elementul de acționare (motor) și totodată bara să rămână în continuare în poziție orizontală. Practic, cuplul creat de greutatea bilei și a barei este echilibrat de cuplul reductorului și al frecărilor statice din acesta. Influența cuplului reductorului și frecărilor din reductor, se poate observa prin histerezisul la comutarea de sens a motorului, deoarece motorul începe să se rotească la aproape 3V alimentare. În dezvoltarea acestui model matematic s-a neglijat influența frecărilor dinamice din reductor. În ecuația a doua din relația (30) se elimină ecuația de regim staționar și se obține astfel modelul matematic liniarizat în jurul unui punct staționar de funcționare al sistemului “Ball on Beam”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \ddot{l} \left( m + \frac{I_B}{R^2} \right) + \frac{I_B}{R} \Delta \ddot{\alpha} + mg \Delta \alpha = 0 \\ \Delta \ddot{\alpha} (ml_0^2 + I_B + I_A) + \frac{I_B}{R} \Delta \ddot{l} + \frac{K_t K_b L}{R_a B} \Delta \dot{\alpha} + mg \Delta l = \frac{K_t}{R_a} u \end{array} \right. \quad (31)$$

În continuare, pentru a prelucra modelul matematic cu păstrarea corespondenței între variabilele de stare și mărimile fizice din proces, se va dezvolta o realizare a sistemului prin ecuațiile de stare considerând vectorul de stare în forma următoare:

In the second equation of (30), if we consider a stationary point of the motor control characterized by  $u=0$ , the beam in a horizontal position  $\Rightarrow \Delta\alpha=0; \Delta\dot{\alpha}=0; \Delta\ddot{\alpha}=0$ , ball distance  $l_0$  from the pivot  $\Rightarrow \Delta l=0; \Delta\dot{l}=0; \Delta\ddot{l}=0$ , we obtain stationary regime equation  $mgl_0 = -\tau_r$ .

This situation fully corresponds with the real system in the sense that the time required to stabilize the ball in desired position, requires command  $u=0$  at actuator (motor) and also the beam to remain in horizontal position. Basically, the torque created by the weight of the ball and the bear is balanced by static friction torque and reduction gear from it.

The influence of reducer torque and friction in them, can be seen by hysteresis when switching motor direction as the motor starts to rotate at 3V supply.

In developing the mathematical model was neglected the influence of dynamic friction reducer. In the second equation of (30) is eliminated stationary regime equation, and thus obtain the mathematical model linearized around a stationary operating point.

Continue to process mathematical model with keeping correspondence between state variables and physical signals from the process will develop an achievement considering the system state vector as shown below:

$$x = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\alpha \\ \Delta\dot{l} \\ \Delta l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Din relațiile (31) și (32) vom avea:

In (31) and (32) we have:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \frac{I_B}{R} + \dot{x}_3 \left( m + \frac{I_B}{R^2} \right) + mgx_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_1 (ml_0^2 + I_B + I_A) + \dot{x}_3 \frac{I_B}{R} + \frac{K_t K_b L}{R_a B} x_1 + mgx_4 = \frac{K_t}{R_a} u \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases} \quad (33)$$

Realizăm, pentru ușurința calculelor, următoarele notații: We make the following notations:

$$a = \frac{I_B}{R}; \quad b = m + \frac{I_B}{R^2}; \quad c = mg; \quad d = ml_0^2 + I_B + I_A; \quad e = \frac{K_t K_b L}{R_a B}; \quad f = \frac{K_t}{R_a}$$

Ecuatiile (33) devin:

The equations (33) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 a + \dot{x}_3 b + x_2 c = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_1 d + \dot{x}_3 b + x_1 e + x_4 c = uf \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases} \quad (34)$$

Din prima ecuație (34), evaluăm variabila In the first equation (34), we evaluate

$\dot{x}_1 = -\frac{b}{a}\dot{x}_3 - \frac{c}{a}x_2$  și o introducem în a 3-a ecuație:  $\dot{x}_1 = -\frac{b}{a}\dot{x}_3 - \frac{c}{a}x_2$  and introduce them in 3rd equation:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{b}{a}\dot{x}_3 - \frac{c}{a}x_2 \right) d + \dot{x}_3 b + x_1 e + x_4 c = uf &\Leftrightarrow \frac{ab-bd}{a}\dot{x}_3 - \frac{cd}{a}x_2 + ex_1 + cx_4 = uf \\ \Rightarrow \dot{x}_3 = -\frac{ae}{ab-bd}x_1 + \frac{cd}{ab-bd}x_2 - \frac{ac}{ab-bd}x_4 + \frac{af}{ab-bd}u \end{aligned} \quad (35)$$

Revenind la ecuația:

Returning to the equation:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = -\frac{b}{a}\dot{x}_3 - \frac{c}{a}x_2 &\Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{b}{a} \left( \frac{cd}{ab-bd}x_2 - \frac{ae}{ab-bd}x_1 - \frac{ac}{ab-bd}x_4 + \frac{af}{ab-bd}u \right) - \frac{c}{a}x_2 \\ \Rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{bcd}{a(ab-bd)}x_2 + \frac{be}{ab-bd}x_1 + \frac{bc}{ab-bd}x_4 - \frac{bf}{ab-bd}u - \frac{c(ab-bd)}{a(ab-bd)}x_2 \\ \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{be}{ab-bd}x_1 - \frac{cb}{(ab-bd)}x_2 + \frac{bc}{ab-bd}x_4 - \frac{bf}{ab-bd}u \end{aligned} \quad (36)$$

Folosind relațiile (35), (36) obținem pentru sistemul (34):

Using relations (35), (36) we obtain for system (34):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{be}{ab-bd}x_1 - \frac{cb}{ab-bd}x_2 + \frac{bc}{ab-bd}x_4 - \frac{bf}{ab-bd}u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -\frac{ae}{ab-bd}x_1 + \frac{cd}{ab-bd}x_2 - \frac{ac}{ab-bd}x_4 + \frac{af}{ab-bd}u \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{array} \right. \quad (37)$$

Relația (37) poate fi scrisă sub formă vectorială: Relationship (37) can be written in vector form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} \Delta\ddot{\alpha} \\ \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\ddot{l} \\ \Delta\dot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{be}{ab-bd} & -\frac{cb}{ab-bd} & 0 & \frac{bc}{ab-bd} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ae}{ab-bd} & \frac{cd}{ab-bd} & 0 & -\frac{ac}{ab-bd} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{bf}{ab-bd} \\ 0 \\ \frac{af}{ab-bd} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \Delta l = y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (38)$$

Relația (38) reprezintă o realizare de stare pentru sistemul considerat, unde s-a urmărit păstrarea corespondenței directe între variabilele de stare  $x_1, x_2, x_3, x_4$  și mărimile fizice de stare  $\Delta\dot{\alpha}, \Delta\alpha, \Delta\ddot{l}, \Delta\dot{l}$  liniarizate în jurul unui punct staționar de funcționare. Mărimea de comandă  $u$  este chiar tensiunea de alimentare a motorului de acționare, descrisă în relația (25).

Astfel, matricele sistemului sunt:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{be}{ab-bd} & -\frac{cb}{ab-bd} & 0 & \frac{bc}{ab-bd} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{ae}{ab-bd} & \frac{cd}{ab-bd} & 0 & -\frac{ac}{ab-bd} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -\frac{bf}{ab-bd} \\ 0 \\ \frac{af}{ab-bd} \\ 0 \end{bmatrix}; C^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1]; D = 0 \quad (39)$$

### 3.Concluzii

Simularea răspunsului acestui sistem folosind pachetul de programe Matlab[4] la un impuls de comandă la motor negativ și pozitiv este prezentat în Fig.4.

Considerând potențiometrul de măsură pentru  $l$ -poziție bilă având valoarea 0 chiar în punctul de pivotare al barei, variabila de stare  $x_4 = \Delta l = l - l_0$  are o evoluție,

Relationship (38) is a status realization for considered system, where was done preserving direct correspondence between state variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$  and physical status signals  $\Delta\dot{\alpha}, \Delta\alpha, \Delta\ddot{l}, \Delta\dot{l}$ , linearized around a stationary operating point.

Control signal  $u$  is right voltage motor actuator, described in (25). Thus, the system matrices are:

### 3.Conclusions

Simulated response of this system using MATLAB software package [4] to an impulse control (to the motor) negative and positive is shown in Fig.4.

Considering the measurement potentiometer for  $l$ -ball position with value 0 even in the pivot point of the beam, the state variable  $x_4 = \Delta l = l - l_0$  have a variations, considering

considerând comanda la motor pozitivă pentru ridicarea barei și negativă pentru coborârea barei, ca în Fig.4.

the positive command to the motor for raising the beam and negative for lowering the beam, as in Fig.4.

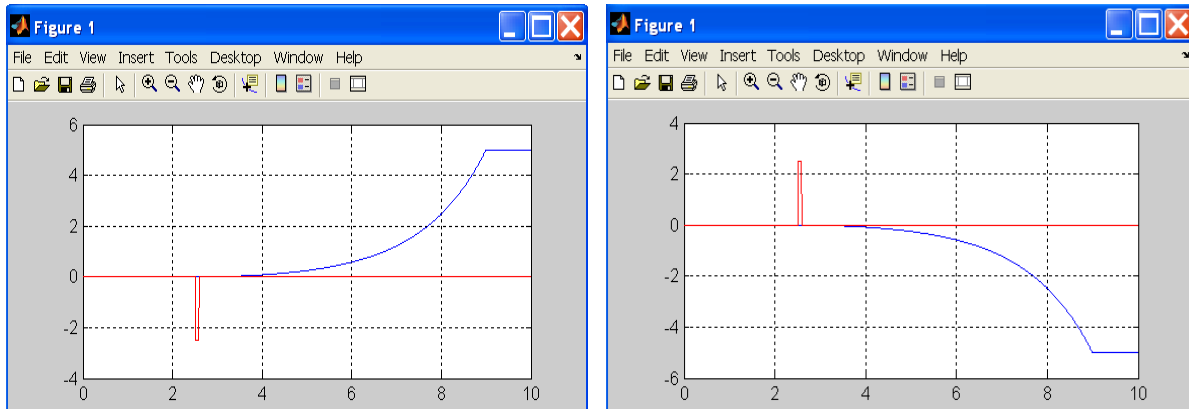


Fig.4. Simularea răspunsului sistemului pentru o variație treaptă a poziției tijei

Fig.4. Simulation of system response for a step change in beam horizontal position

Se poate observa că la un impuls de comandă negativ (graficul de culoare roșie) a motorului bara coboară și bila începe să se rostogolească, parcurgând potențiometrul în sens crescător al tensiunii (spre partea opusă pivotului). Analog, la un impuls de comandă pozitiv (graficul de culoare roșie) a motorului bara se ridică și bila începe să se rostogolească parcurgând potențiometrul în sens descrescător al tensiunii (spre pivot).

We can observe that a negative impulse motor command (red graph) bar down and the ball starts to roll, going through the tension knob upward (opposite to the pivot).

Similarly, a positive impulse motor command (red graph) raises the bar and the ball starts to roll downwards completing the potentiometer voltage (for pivot).

Valorile proprii ale matricei A prezentate mai jos indică un sistem instabil:

Eigenvalues of matrix A given below indicates an unstable system.

$$\begin{aligned} \text{Eigenvalues } \_A = \\ & -135.502053231339 \\ & -0.321181543720 + 0.595493736320i \\ & -0.321181543720 - 0.595493736320i \\ & 0.708906635242 \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAFIE

## REFERENCES

- [1] F. Andreev, D. Auckly, S. Gosavi, L. Kapitanski, A. Kelkar, W. White, “**Matching, linear systems, and the ball and beam**”, Automatica, Vol. 38, Issue 12, Dec. 2002, Pag.2147-2152
- [2] A. Burghardt, J. Giergiel, “**Modelling and control of a underactuated sphere and beam system**”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Available online 4 May 2010, ISSN: 1007-5704
- [3] M. Popescu, A. Runceanu, “**Solution to the Ball and Beam system using the full state feedback control**”, 9<sup>th</sup> International Carpathian Control Conference-ICCC 2008, Sinaia, România, 25-28 Mai 2008, pag.535-538, ISBN 978-973-746-897-0
- [4] A. H. Register, “**A Guide to MATLAB Object-Oriented Programming**”, 2007, SciTech Publishing Inc., ISBN-13: 978-1-58488-911-3, ISBN-10: 1-58488-911-X