# O PROBLEMĂ DE CONTROL LINIAR PĂTRATIC PENTRU SISTEME LINIARE DISCRETE CU SALTURI MARKOV, AUTONOME ŞI DEFINITE IN SPAŢII INFINIT- DIMENSIONALE

**Viorica-Mariela UNGUREANU,**
*Universitatea "Constantin Brâncuşi" din Tg-Jiu, ROMÂNIA*

**Rezumat**. În această lucrare este rezolvată o variantă autonomă a problemei de control liniar pătratic optimal discutată în [10], pentru o clasă de sisteme liniare infinit dimensionale, discrete, cu salturi Markov, pentru care spatiul stărilor lanţului Markov este infinit. Un exemplu ilustrează teoria.

**Cuvinte cheie:** sisteme discrete; lanţuri Markov; detectabilitate; stabilizabilitate; control liniar pătratic; control optimal.

## 1. INTRODUCERE

În ultimele decenii, studiul sistemelor liniare cu salturi Markov (SLSM) infinite a atras interesul cercetătorilor şi a condus la noi aplicaţii în teoria modernă a cozilor [3] sau în studiul sistemelor cu siguranţă critică sau de înaltă integritate (a se vedea [1-4], [6] si refereinţele incluse în acestea). Termenul de salturi Markov infinite se referă aici la faptul că spaţiul stărilor procesului Markov este numărabil infinit. În lumea fizică, schimbarea dinamicii este datorată producerii unor evenimente discrete la momente de timp aleatoare. De exemplu, comportarea unui sistem multi-server (ce atribuie cereri/sarcini serverelor gazdă) este adesea modelată ca un lanţ Markov cu un spaţiu al stărilor infinit; acest lucru este posibil deoarece timpul dintre evenimente este independent (fără memorie) şi următorul eveniment ce urmează să se producă depinde numai de ultimul eveniment produs. Sistemele stochastice hibride apar în numeroase aplicaţii ale sistemelor cu modele multiple: de exemplu în managementul

# A LINEAR QUADRATIC CONTROL PROBLEM FOR TIME INVARIANT MARKOV-JUMP DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS IN INFINITE DIMENSIONS

**Viorica-Mariela UNGUREANU,**
*"Constantin Brâncuşi" University of Tg-Jiu, Tg-Jiu, ROMÂNIA*

**Abstract.** In this paper we solve a time-invariant version of the linear quadratic (LQ) optimal control problem in [10] for a class of infinite-dimensional Markov-jump discrete-time linear systems (MJDLSs) with countably infinite state space of the Markovian chain. An example illustrates the theory.

**Keywords:** discrete-time systems; Markov chain; detectability; stabilizability; linear quadratic control; optimal control.

## 1. INTRODUCTION

In the last decades, the study of infinite Markov jumps linear systems (MJLSs) have attracted the interest of the researchers and led to new applications in modern queuing network theory [3] or in the study of safety-critical and high integrity systems (see [1-4], [6] and the references therein.) The term infinite Markov jumps refers here to the state space of the Markov chain, that is infinite countable. The linear infinite MJLSs are useful models for many systems that exhibit abrupt changes in their dynamics. In the physical world, the change in dynamics is due to the occurrence of discrete events at random times. For example, the behavior of a complex multi-server system (assigning requests/jobs to host servers/machines) is often modeled as a Markov chain with infinite state space; this is because the times between events are independent (memory-less) and the event which will occur next depends only on the last occurred event. Stochastic hybrid systems arise in numerous traficului aerian, în cazul sistemelor flexibile de fabricaţie, cel al sistemelor de control ce tolerează erori etc. [6]. Unele rezultate privind controlul liniar pătratic optimal pentru sisteme liniare discrete cu salturi Markov (SLDSM-uri) infinite au fost obţinute în [7] (pentru un caz particular de lanţuri Markov) în condiţii de stabilizabilitate şi observabilitate stohastică uniformă. Recent astfel de probleme au fost rezolvate în [10] pentru SLDSM-uri infinite mai generale, ce îndeplinesc condiţii de detectabilitate stohastică şi de stabilizabilitate. În acest articol obţinem o versiune a Teoremei 22 din [10] pentru sisteme autonome şi vom da un exemplu care să demonstreze utilitatea teoriei. Spre deosebire de lucrarea [10] , unde este studiată existenţa unei soluţii globale mărginite şi nenegative pentru ecuaţia Riccati discretă associată problemei de control, în cazul de faţă vom dicuta existenţa unei soluţii pozitive pentru o ecuaţie Riccati algebrică.

## 2. NOTAŢII ŞI FORMULAREA PROBLEMEI

Fie $H$, $U$ şi $V$ spaţii Hilbert reale şi separabile. Aici $L(U,H)$ este spaţiul Banach real al tuturor operatorilor liniari şi mărginiţi definiţi pe $U$ cu valori în $H$, iar $\mathbf{E}_H$ este subspaţiul Banach al lui $L(H):=L(H,H)$, format din toţi operatorii autoadjuncţi. Fie $\mathbf{Z}$ un interval de întregi. Vom nota prin $l^{\mathbf{Z}}_{L(U,H)}$ spaţiul Banach real format din şirurile $X=\{X(i)\in L(U,H)\}_{i\in\mathbf{Z}}$ ce au proprietatea că $\|X\|_{\mathbf{Z}}=\sup_{i\in\mathbf{Z}}\|X(i)\|<\infty$. Acest spaţiu este dotat cu adunarea pe componente şi înmulţirea cu scalari (reali) uzuală. Dacă $I_H$ este operatorul identic pe $H$, atunci $\Phi_H$ este acel element al lui $l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$ definit astfel $\{\Phi_H(i)=I_H\}_{i\in\mathbf{Z}}$.

Spunem că un element $X\in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$ este *nenegativ* (şi scriem $X\geq 0$) dacă şi numai

applications of systems with multiple models; e.g., air traffic management, flexible manufacturing systems, fault tolerant control systems etc [6]. Some results concerning LQ optimal control problems for infinite MJDLSs were obtained in [7] (for a special case of Markov chains) under stabilizability and stochastic uniform observability conditions. Recently such problems were solved in [10] for more general infinite MJDLSs, which are stochastic detectable and stabilizable. In this paper we obtain the time invariant version of Theorem 22 in [10] and we provide an example which proves the usefulness of the theory. Unlike [10], where the existence of global, nonnegative and bounded solutions for a discrete-time Riccati equation of control is studied, we will discuss here the existence of nonnegative solutions for an algebraic Riccati equation.

## 2. NOTATION AND STATEMENT OF THE PROBLEM

Let $H,U$ and $V$ be real separable Hilbert spaces. Here $L(U,H)$ is the real Banach space of linear and bounded operators from $U$ into $H$ and $\mathbf{E}_H$ is the Banach subspace of $L(H):=L(H,H)$, formed by all self-adjoint operators. Let $\mathbf{Z}$ be an interval of integers. By $l^{\mathbf{Z}}_{L(U,H)}$ we denote the real Banach space of sequences $X=\{X(i)\in L(U,H)\}_{i\in\mathbf{Z}}$ with the property that $\|X\|_{\mathbf{Z}}=\sup_{i\in\mathbf{Z}}\|X(i)\|<\infty$ and endowed with the usual term-wise addition and (real) scalar multiplication. If $I_H$ is the identity operator on $H$, then $\Phi_H$ will be the element of $l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$ defined by $\{\Phi_H(i)=I_H\}_{i\in\mathbf{Z}}$.

An element $X\in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$ is said to be *nonnegative* (and we write $X\geq 0$) iff $X(i)\geq 0$ for all $i\in\mathbf{Z}$. We say that $X\geq Y, X,Y\in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$ if $X(i)-Y(i)\geq 0$, for all $i\in\mathbf{Z}$.

Another ordered Banach space we need in the sequel is

dacă $X(i)\geq 0$ pentru toţi $i\in \mathbf{Z}$. Spunem că $X\geq Y, X, Y\in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$ dacă $X(i)-Y(i)\geq 0$, pentru orice $i\in \mathbf{Z}$.
Un alt spaţiu Banach ordonat de care avem nevoie în continuare este

$$\mathbf{N}^{\mathbf{Z}} = \{D = \{D(i)\}_{i\in\mathbf{Z}} \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}, \|\|D\|\| = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \|D(i)\|_1 < \infty\}$$

(Pentru proprietăţile de bază ale lui $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$, cititorul poate consulta [9] şi [10]).
Fie $\mathbf{N}$ mulţimea numerelor naturale şi fie $\tau\in \mathbf{N}^* = \mathbf{N}-\{0\}$ dat. În cele ce urmează presupunem îndeplinite următoarele ipoteze:

(P1)
$A_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(H)}, B_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(U,H)}, p = 0,1,.,\tau, C\in l^{\mathbf{Z}}_{L(H,V)}$, iar $K\in l^{\mathbf{Z}}_{L(U)}$ este pozitiv, adică există $\delta > 0$ astfel încât

$$K\geq \delta\Phi_U.$$

(P2)

- $\{r_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un lanţ Markov pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ cu spaţiu stărilor $\mathbf{Z}$, $P(r_n = i) > 0, n\in\mathbf{N}, i\in\mathbf{Z}$, şi matricea de probabilitate de tranziţie $Q = \{q_{ij} = P(r_{n+1} = j \mid_{r_n = i})\}_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$;
- $\{w_{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}}, p = 1,...,\tau$ sunt şiruri de variabile aleatoare definite pe $(\Omega, \mathbf{F}, P)$, cu valori reale, media zero şi de pătrat integrabile, ce au proprietăţile:
  $w_n = (w_{1,n}, w_{2,n},.., w_{\tau,n})^T, n\in\mathbf{N}$ este un şir de vectori aleatori independenţi,
  $E[w_n w_n^T] = diag(\mu_1,...,\mu_\tau), n\in\mathbf{N}$; (Aici $^T$ este folosit pentru a nota transpoziţia.)
- Procesele stohastice $\{r_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ şi $\{w_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sunt independente.

Fie $\mathbf{F}_n$ şi $\mathbf{G}_n$ $\sigma$-algebrele generate de $\{w_{1,k}, w_{2,k},.., w_{\tau,k}, 0\leq k\leq n\}$ şi respectiv $\{r_k, 0\leq k\leq n\}$. Atunci definim $\sigma$ -algebra $\mathbf{H}_n, n\in\mathbf{N}$ punând $\mathbf{H}_0 = \mathbf{G}_0$ şi $\mathbf{H}_n = \mathbf{F}_{n-1}\vee$ $\mathbf{G}_n$ pentru orice $n\geq 1, n\in\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N}^{\mathbf{Z}} = \{D = \{D(i)\}_{i\in\mathbf{Z}} \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}, \|\|D\|\| = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \|D(i)\|_1 < \infty\}$$

(For some properties of $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$, the reader can consult [9] and [10]).
Let $\mathbf{N}$ be the set of natural numbers and $\tau\in\mathbf{N}^* = \mathbf{N}-\{0\}$ be given. In what follows we assume:

(P1)
$A_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(H)}, B_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(U,H)}, p = 0,1,.,\tau, C\in l^{\mathbf{Z}}_{L(H,V)}$ and that $K\in l^{\mathbf{Z}}_{L(U)}$ is positive, i.e. there is $\delta > 0$ such that

$$K\geq \delta\Phi_U.$$

(P2)

- $\{r_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is a Markov chain on a given probability space $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ with the state space $\mathbf{Z}$, $P(r_n = i) > 0, n\in\mathbf{N}, i\in\mathbf{Z}$, and the transition probability matrix $Q = \{q_{ij} = P(r_{n+1} = j \mid_{r_n = i})\}_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$;
- $\{w_{p,n}\}_{n\in\mathbf{N}}, p = 1,...,\tau$ are sequences of real valued, zero mean, square integrable random variables on $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ having the properties:
  $w_n = (w_{1,n}, w_{2,n},.., w_{\tau,n})^T, n\in\mathbf{N}$ is a sequence of independent random vectors,
  $E[w_n w_n^T] = diag(\mu_1,...,\mu_\tau), n\in\mathbf{N}$; (Here $^T$ denotes the transposition.)
- The stochastic processes $\{r_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ and $\{w_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ are independent.

Let $\mathbf{F}_n$ and $\mathbf{G}_n$ be the $\sigma$-algebras generated by $\{w_{1,k}, w_{2,k},.., w_{\tau,k}, 0\leq k\leq n\}$ and $\{r_k, 0\leq k\leq n\}$, respectively. Then we define the $\sigma$ -algebra $\mathbf{H}_n, n\in\mathbf{N}$ by setting $\mathbf{H}_0 = \mathbf{G}_0$ and $\mathbf{H}_n = \mathbf{F}_{n-1}\vee$ $\mathbf{G}_n$ for all $n\geq 1, n\in\mathbf{N}$.

We consider the following stochastic system $(A : B; C)$

$$(1)\quad x_{n+1} = \left[A_0(r_n) + \sum_{p=1}^{\tau} w_{p,n} A_p(r_n)\right] x_n +$$

Considerăm următorul sistem stohastic $(A : B;C)$

(1) $x_{n+1} = \left[ A_0(r_n) + \sum_{p=1}^{\tau} w_{p,n} A_p(r_n) \right] x_n +$

$+\left[ B_0(r_n) + \sum_{p=1}^{\tau} w_{p,n} B_n(r_n) \right] u_n, n \geq k, n \in \mathbf{N}$

(2) $x_k = x \in H$

(3) $y_n = C(r_n) x_n.$

Sistemul cu control (1), (2) va fi notat $(A : B)$. De asemenea folosim notaţiile $(A)$ şi $(A;C)$ pentru sistemele (1), (2) şi respectiv (1), (2), (3), în cazul în care variabila de control lipseşte, adică $B_p = 0, p = 0,1,.,\tau$ .

Este bine vunoscut faptul că, pentru orice $k \in \mathbf{N}$ şi $x \in H$ fixaţi, există o unică soluţie $x_n(k,x)$ a lui $(A)$ ce satisface condiţia iniţială (2).

Acum, pentru $i \in \mathbf{Z}$, $x \in H$ şi $k \in \mathbf{N}$ fixaţi, introducem funcţionala cost

(4) $I_{k,x,i}(u) = \sum_{n=k}^{\infty} E[\|C(r_n)x_n\|^2 \, |_{r_k=i}] +$

$E[\langle K(r_n)u_n, u_n \rangle |_{r_k=i}], i \in \mathbf{Z},$

pentru care controlul admisibil $u = \{u_n\}_{n \geq k,, n \in \mathbf{N}}$ aparţine mulţimii $\mathbf{U}_{k,x} = \{u = \{u_n\}_{n \geq k} \mid u_n, n \geq k$ sunt variabile aleatoare cu valori în $U$ , $\mathbf{H}_n$ - măsurabile ce satisfac condiţiile $\sup_{n \geq k} E\left[\|u_n\|^2 \, |_{r_k=i}\right] < \infty$ şi $I_{k,x,i}(u) < \infty$ pentru toţi $i \in \mathbf{Z}\}$ .

Problema noastră de control optimal $(O)$ constă în minimizarea performanţei (4), asociate sistemului (1) - (3), în clasa $\mathbf{U}_{k,x}$ .

## 3. PRINCIPALUL REZULTAT ŞI O APLICAŢIE

DEFINIŢIA 1. Sistemul stohastic $(A)$ este *uniform exponenţial stabil în medie condiţionată (UESMC)* dacă şi numai dacă există $\beta \geq 1$, $\alpha \in (0,1)$ astfel încât

$+\left[ B_0(r_n) + \sum_{p=1}^{\tau} w_{p,n} B_n(r_n) \right] u_n, n \geq k, n \in \mathbf{N}$

(2) $x_k = x \in H$

(3) $y_n = C(r_n) x_n.$

The control system (1), (2) will be denoted $(A : B)$ . Also we will use the notation $(A)$ and $(A;C)$ for the system (1), (2) and (1), (2), (3), respectively, in the case where the control variable is missing, i.e. $B_p = 0, p = 0,1,.,\tau$ .

It is well known that, for any $k \in \mathbf{N}$ and $x \in H$ fixed, there is a unique solution $x_n(k,x)$ of $(A)$ that satisfies the initial condition (2).

Now, for any fixed $i \in \mathbf{Z}$ , $x \in H, k \in \mathbf{N}$ we introduce the cost functional

(4) $I_{k,x,i}(u) = \sum_{n=k}^{\infty} E[\|C(r_n)x_n\|^2 \, |_{r_k=i}] +$

$E[\langle K(r_n)u_n, u_n \rangle |_{r_k=i}], i \in \mathbf{Z},$

where the admissible control $u = \{u_n\}_{n \geq k,, n \in \mathbf{N}}$ belongs to the set $\mathbf{U}_{k,x} = \{u = \{u_n\}_{n \geq k} \mid u_n, n \geq k$ are $U$ -valued, $\mathbf{H}_n$ - measurable random variables satisfying $\sup_{n \geq k} E\left[\|u_n\|^2 \, |_{r_k=i}\right] < \infty$ and $I_{k,x,i}(u) < \infty$ for all $i \in \mathbf{Z}\}$ .

Our optimal control problem $(O)$ consists in minimizing the performance (4), subject to (1) - (3), over the class of controls $\mathbf{U}_{k,x}$ .

## 3. MAIN RESULT AND AN APPLICATION

DEFINITION 1. The stochastic system $(A)$ is *uniformly exponentially stable in conditional mean (UESCM)* iff there exist $\beta \geq 1$, $\alpha \in (0,1)$ such that

$E\left[\|x_n(k,x)\|^2 \, |_{r_k=i}\right] \leq \beta \alpha^{n-k} \|x\|^2,$

for all $k \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{Z}$ and $x \in H$ .

DEFINITION 2. The control system

$E\left[\left\|x_n(k,x)\right\|^2 \mid_{r_k=i}\right] \leq \beta\alpha^{n-k}\left\|x\right\|^2$,
pentru orice $k \in \mathbf{N}, i \in \mathbf{Z}$ şi $x \in H$.

DEFINIŢIA 2. Sistemul cu control $(A : B)$ este stabilizabil *în medie condiţionată* dacă şi numai dacă există un şir mărginit $F = \{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset l^{\mathbf{Z}}_{L(H,U)}$ astfel încât ecuaţia

$$x_{n+1} = A_0(r_n)x_n + (B_0F_n)(r_n)x_n + \sum_{p=1}^{\tau} w_{p,n}\left[A_p(r_n) + (B_pF_n)(r_n)\right]x_n$$

este *UESMC*; şirul $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ se numeşte şir feedback stabilizant pentru $(A : B)$.

DEFINIŢIA 3. Sistemul $(A;C)$ este detectabil în medie condiţionată dacă şi numai dacă există un şir mărginit $L = \{L_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset l^{\mathbf{Z}}_{L(V,H)}$ astfel încât ecuaţia

$$x_{n+1} = A_0(r_n)x_n + (L_nC_0)(r_n)x_n + \sum_{p=1}^{\tau} w_p\left[A_p(r_n) + (L_nC_p)(r_n)\right]x_n$$

este UESMC.

Ca şi în [10], luăm $\mu_0 = 1 \in \mathbf{R}$, $X_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(V,H)}$, $Y_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(U,H)}, \Xi_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(H)} p = 0,..,\tau$ şi introducem operatorii liniari

$$\Lambda_X(R) = \sum_{p=0}^{\tau} \mu_p X_p^{[*]}[\sum_{j\in\mathbf{Z}} q_{ij}R(j)]X_p, R \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$$

$$\Lambda_{X,Y}(R) = \sum_{p=0}^{\tau} \mu_p X_p^{[*]}[\sum_{j\in\mathbf{Z}} q^n_{ij}R(j)]Y_p, R \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$$

(5) $\Gamma_{\Xi}(D) = \sum_{p=0}^{\tau} \mu_p \sum_{j\in\mathbf{Z}} q_{ji}\left(\Xi_{p,n} D \Xi_{p,n}^{[*]}\right)(j)$

$, D \in \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$.

Combinând Teorema 22 din [10], Teorema 15 şi Observaţia 16 din [8] obţinem următoarea teoremă.

TEOREMA 1. Dacă $(A : B)$ este stabilizabil în medie condiţionată şi $(A;C)$ este stohastic detectabil, atunci $(O)$ are o soluţie. Controlul

$(A : B)$ is stabilizable *in conditional mean* iff there is a bounded sequence $F = \{F_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset l^{\mathbf{Z}}_{L(H,U)}$ such that the equation

$$x_{n+1} = A_0(r_n)x_n + (B_0F_n)(r_n)x_n + \sum_{p=1}^{\tau} w_{p,n}\left[A_p(r_n) + (B_pF_n)(r_n)\right]x_n$$

is *UESCM*; the sequence $\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is called a stabilizing feedback gain for $(A : B)$.

DEFINITION 3. The system $(A;C)$ is detectable in conditional mean iff there is a bounded sequence $L = \{L_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset l^{\mathbf{Z}}_{L(V,H)}$ such that the equation

$$x_{n+1} = A_0(r_n)x_n + (L_nC_0)(r_n)x_n + \sum_{p=1}^{\tau} w_p\left[A_p(r_n) + (L_nC_p)(r_n)\right]x_n$$

is UESCM.

As in [10], we set $\mu_0 = 1 \in \mathbf{R}$, $X_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(V,H)}$, $Y_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(U,H)}, \Xi_p \in l^{\mathbf{Z}}_{L(H)} p = 0,..,\tau$ and we introduce the linear operators

$$\Lambda_X(R) = \sum_{p=0}^{\tau} \mu_p X_p^{[*]}[\sum_{j\in\mathbf{Z}} q_{ij}R(j)]X_p, R \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$$

$$\Lambda_{X,Y}(R) = \sum_{p=0}^{\tau} \mu_p X_p^{[*]}[\sum_{j\in\mathbf{Z}} q^n_{ij}R(j)]Y_p, R \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}$$

(5) $\Gamma_{\Xi}(D) = \sum_{p=0}^{\tau} \mu_p \sum_{j\in\mathbf{Z}} q_{ji}\left(\Xi_{p,n} D \Xi_{p,n}^{[*]}\right)(j)$

$, D \in \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$.

Combining Theorem 22 in [10], Theorem 15 and Remark 16 in [8] we obtain the following.

THEOREM 1. If $(A : B)$ is stabilizable in conditional mean and $(A;C)$ is stochastically detectable, then $(O)$ has a solution. The optimal control $\tilde{u} = \{\tilde{u}_n\}_{n\geq k, k\in\mathbf{N}}$ and the optimal value of the performance (4) are given by

$$\tilde{u}_n = F(r_n)\tilde{x}_n$$

and

optimal $\tilde{u} = \{\tilde{u}_n\}_{n\geq k, k\in \mathbf{N}}$ şi valoarea optimă a performanţei (4) sunt date de

$$\tilde{u}_n = F(r_n)\tilde{x}_n$$

şi respectiv

$$I_{k,x,i}(\tilde{u}) = \langle R(i)x, x\rangle, i \in \mathbf{Z},$$

unde $R$ este o soluţie nenegativă a ecuaţiei algebrice Riccati

$$(6)\ R = \Lambda_A(R) + \mathbf{C} - \\ -\Lambda_{A,B}(R)(K + \Lambda_B(R))^{[-1]}\Lambda_{B,A}(R),$$

$$(7)\ F = -(K + \Lambda_B(R))^{[-1]}\Lambda_{B,A}(R)$$

şi $\tilde{x}_n$ este soluţia sistemului închis $(A + BF)$.
DEMONSTRAŢIE. Presupunem că (1)-(2) este stabilizabil în medie condiţionată. Argumentând ca în demonstraţia Teoremei 22 din [10], deducem că ipotezele Teoremei 15 din [8] sunt îndeplinite, dacă ne referim la ecuaţia Riccati

$$(8)\ R_n = \Lambda_A(R_{n+1}) + \mathbf{C} - \\ \Lambda_{A,B}(R_{n+1})(K + \Lambda_B(R_{n+1}))^{[-1]}\Lambda_{B,A}(R_{n+1}).$$

Mai mult, concluziile Observaţiei 16 a) din [8] rămân adevărate, căci coeficienţii ecuaţiei Riccati de mai sus sunt şiruri constante. Rezultă că (8) are o soluţie globală, mărginită şi nenegativă $R_n = R \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}, n \in \mathbf{N}$. Deci, ecuaţia algebrică Riccati (6) are o soluţie nenegativă $R$. Mai departe, concluzia rezultă ca în demonstraţia Teoremei 22 din [10].

EXEMPLUL 1. Presupunem că $\mathbf{Z}$ este mulţimea numerelor întregi $\mathbf{Z}$ şi că $Q_n = Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi că $q_{i,i-1} = \frac{1}{2}$, $q_{ii} = \frac{1}{2}$, iar $q_{ij} = 0$ altfel. Fie $H = U = V = l^2(\mathbf{Z})$, unde $l^2(\mathbf{Z})$ este spaţiul Hilbert real, separabil format din toate şirurile $x = \{x(i) \in \mathbf{R}\}_{i\in\mathbf{Z}}, \|x\|^2 = \sum_{i\in\mathbf{Z}} x(i)^2 < \infty$ [5].
De asemenea considerăm operatorul liniar şi marginit pe $l^2(\mathbf{Z})$,
$S_{i+}\ :\ l^2(\mathbf{Z}) \to l^2(\mathbf{Z}), S_{i+}(x)(j) = x(j+i),$

$$I_{k,x,i}(\tilde{u}) = \langle R(i)x, x\rangle, i \in \mathbf{Z},$$

respectively, where $R$ is a nonnegative solution of the algebraic Riccati equation

$$(6)\ R = \Lambda_A(R) + \mathbf{C} - \\ -\Lambda_{A,B}(R)(K + \Lambda_B(R))^{[-1]}\Lambda_{B,A}(R),$$

$$(7)\ F = -(K + \Lambda_B(R))^{[-1]}\Lambda_{B,A}(R)$$

and $\tilde{x}_n$ is the solution of the closed-loop system $(A + BF)$.
PROOF. Assume that (1)-(2) is stabilizable in conditional mean. Arguing as in the proof of Theorem 22 in [10], we deduce that the hypotheses of Theorem 15 in [8] hold when we refer to the Riccati equation

$$(8)\ R_n = \Lambda_A(R_{n+1}) + \mathbf{C} - \\ \Lambda_{A,B}(R_{n+1})(K + \Lambda_B(R_{n+1}))^{[-1]}\Lambda_{B,A}(R_{n+1})$$

Moreover, the conclusions of Remark 16 a) in [8] remains true since the coefficients of the above Riccati equation are constant sequences. It follows that (8) has a global, bounded and nonnegative solution $R_n = R \in l^{\mathbf{Z}}_{\mathbf{E}_H}, n \in \mathbf{N}$. Therefore the algebraic Riccati equation (6) has a nonnegative solution $R$. The conclusion follows as in the proof of Theorem 22 in [10].

EXAMPLE 1. Assume that $\mathbf{Z}$ is the set of integers $\mathbf{Z}$ and $Q_n = Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$ for all $n \in \mathbf{N}$, where $q_{i,i-1} = \frac{1}{2}$, $q_{ii} = \frac{1}{2}$ and $q_{ij} = 0$ otherwise. Let $H = U = V = l^2(\mathbf{Z})$, where $l^2(\mathbf{Z})$ is the real separable Hilbert space consisting of all sequences $x = \{x(i) \in \mathbf{R}\}_{i\in\mathbf{Z}}, \|x\|^2 = \sum_{i\in\mathbf{Z}} x(i)^2 < \infty$ [5].
Also let
$S_{i+}\ :\ l^2(\mathbf{Z}) \to l^2(\mathbf{Z}), S_{i+}(x)(j) = x(j+i), j \in \mathbf{Z}$
be a linear and bounded operator on $l^2(\mathbf{Z})$. Clearly $\|S_{i+}\| = 1$, for all $i \in \mathbf{Z}$.
Now we will solve the optimal control problem $(O)$ for the following values of the coefficients:

$j \in \mathbf{Z}$. În mod clar $\|S_{i+}\| = 1$, pentru orice $i \in \mathbf{Z}$.
Vom rezolva problema de control optimal $(O)$ pentru următoarele valori ale coeficienţilor:
$A_0, B_0, C, K \in l^{\infty}_{L(l^2(\mathbf{Z}))}$ sunt definiţi de

$$A_0(i) = \begin{cases} 2S_{i+}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ \frac{1}{2} S_{0+}, i = 0 \end{cases},$$

$$B_0(i) = \begin{cases} \frac{9}{7}\sqrt{14} S_{i+}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ \frac{3}{14}\sqrt{14} S_{0+}, i = 0 \end{cases},$$

$$C(i) = \begin{cases} S_{i+}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ S_{0+}, i = 0 \end{cases},$$

$$K(i) = I_{l^2(\mathbf{Z})}, \quad i \in \mathbf{Z}$$

şi $A_k = 0, B_k = 0$ pentru orice $k = \overline{1, \tau}$. În acest caz operatorii adjuncţi $A_0^*, B_0^*, C^* \in l^{\infty}_{L(l^2(\mathbf{Z}))}$ sunt daţi de $A_0^*(i) = A_0(-i), B_0^*(i) = B_0(-i)$ şi $C^*(i) = C(-i)$ pentru orice $i \in \mathbf{Z}$.
În mod evident $A_k, B_k, K, C, k = \overline{0, \tau}$ satisfac ipoteza (P1) şi luând $L \in l^{\infty}_{L(l^2(\mathbf{Z}))}$,
$L(i) = \begin{cases} -\frac{3}{2} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ -I_{l^2(\mathbf{Z})}, i = 0 \end{cases}$, observăm că
$A + LC(i) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ -\frac{1}{2} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i = 0 \end{cases}$. Având în vedere (5), obţinem $\Gamma_{A+LC}(\Phi_H)(i) = \frac{1}{4} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i \in \mathbf{Z}$ şi $\|\Gamma_{A+LC}(\Phi_H)\|_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{4}$. Din Lema 6 din [7] rezultă că $\|\Gamma_{A+LC}\| = \frac{1}{4}$, iar Propoziţia 17 din [10] implică faptul că $(A; C)$ este detectabil.
Acum, un calcul simplu arată că ecuaţia algebrică Riccati (6), asociată problemei de control, poate fi rescrisă astfel

(9) $$R(i) = 4R(i+1) + 1 - \frac{648}{7} R(i+1)\left(1 + \frac{162}{7} R(i+1)\right)^{-1} R(i+1)$$

dacă $i \neq 0$ şi

$A_0, B_0, C, K \in l^{\infty}_{L(l^2(\mathbf{Z}))}$ are defined by

$$A_0(i) = \begin{cases} 2S_{i+}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ \frac{1}{2} S_{0+}, i = 0 \end{cases},$$

$$B_0(i) = \begin{cases} \frac{9}{7}\sqrt{14} S_{i+}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ \frac{3}{14}\sqrt{14} S_{0+}, i = 0 \end{cases},$$

$$C(i) = \begin{cases} S_{i+}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ S_{0+}, i = 0 \end{cases},$$

$K(i) = I_{l^2(\mathbf{Z})}$, for all $i \in \mathbf{Z}$

and $A_k = 0, B_k = 0$ for all $k = \overline{1, \tau}$. In this case the adjoint operators $A_0^*, B_0^*, C^* \in l^{\infty}_{L(l^2(\mathbf{Z}))}$ are given by $A_0^*(i) = A_0(-i), B_0^*(i) = B_0(-i)$ and $C^*(i) = C(-i)$ for all $i \in \mathbf{Z}$.
Obviously $A_k, B_k, K, C, k = \overline{0, \tau}$ satisfy the hypothesis (P1) and taking $L \in l^{\infty}_{L(l^2(\mathbf{Z}))}$,
$L(i) = \begin{cases} -\frac{3}{2} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ -I_{l^2(\mathbf{Z})}, i = 0 \end{cases}$, we observe that
$A + LC(i) = \begin{cases} \frac{1}{2} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i \in \mathbf{Z}, i \neq 0 \\ -\frac{1}{2} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i = 0 \end{cases}$. In view of (5), we have $\Gamma_{A+LC}(\Phi_H)(i) = \frac{1}{4} I_{l^2(\mathbf{Z})}, i \in \mathbf{Z}$ and $\|\Gamma_{A+LC}(\Phi_H)\|_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{4}$. By Lemma 6 from [7] it follows that $\|\Gamma_{A+LC}\| = \frac{1}{4}$ and Proposition 17 in [10] implies that $(A; C)$ is detectable.
Now, an easy computation shows that the algebraic Riccati equation of control (6) can be rewritten as

(9) $$R(i) = 4R(i+1) + 1 - \frac{648}{7} R(i+1)\left(1 + \frac{162}{7} R(i+1)\right)^{-1} R(i+1)$$

if $i \neq 0$ and

(10) $$R(0) = \frac{1}{4} R(1) + 1 - \frac{9}{56} R(1)\left(1 + \frac{9}{14} R(1)\right)^{-1} R(1)$$

if $i = 0$.
We observe that $R(i) = \frac{7}{6} I_H, i \in \mathbf{Z} \in \mathbf{K}_H^{\mathbf{Z}}$ is a solution of both (9) and (10). Therefore, (6)

(10) $R(0)=\frac{1}{4}R(1)+1-$

$$-\frac{9}{56}R(1)\left(1+\frac{9}{14}R(1)\right)^{-1}R(1)$$

dacă $i = 0$.

Observăm că $R(i)=\frac{7}{6}I_H, i\in \mathbf{Z}\in \mathcal{K}_H^{\mathbf{Z}}$ este soluţie atât pentru (9) cât şi pentru (10). Deci (6) are soluţie globală, nenegativă şi mărginită $R_n = R$, $n\in \mathbf{N}$. Conform Teoremei 1, această soluţie este stabilizantă pentru $(A : B)$ deoarece $(A;C)$ este detectabilă. De asemenea, Teorema 1 ne asigură că problema de control optimal are o soluţie, valoarea minimă a funcţionalei cost (4) este

$$\min_{u\in \mathcal{U}_{k,x}} I_{k,x,i}=\frac{7}{6}\|x\|^2, i\in \mathbf{Z}$$

şi controlul optim este $\tilde{u}_n = F(r_n)\tilde{x}_n$, unde $F(i)=\begin{cases}-\frac{27}{7}I_{l^2(\mathbf{Z})}, i\in \mathbf{Z}, i\neq 0\\ -\frac{3}{28}I_{l^2(\mathbf{Z})}, i=0\end{cases}$ pentru orice $n\in \mathbf{N}$ .

## REFERINŢE


1. W. P. Blair Jr, D. D.,Sworder, *Continuous time regulation of a class of econometric models*, IEEE Trans. Systems Man. Cyber., 5(1975), 341-346
2. O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, R.P. Marques, *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Probability and its Applications, Springer, New York, 2005.
3. H. Daduna, *Queueing Networks with Discrete Time Scale*, Lecture Notes in Computer Science,Vol. 2046, Springer, 2001.
4. J. B. Do Val, T.Basar, *Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem*, J. econom. Dynam. Control, 23(1999), 1099-1131.
5. R. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory,* Academic Press, New York şi London ,1972.
6. M. Mariton, Jump Linear Systems in Automatic Control, Marcel Dekker, New York, 1990.


has a global, nonnegative and bounded solution $R_n = R$, $n\in \mathbf{N}$. By Theorem 1, this solution is stabilizing for $(A : B)$ because $(A;C)$ is detectable. Also, Theorem 1 ensures that our optimal control problem has a solution, the minimum value of the cost functional (4) is

$$\min_{u\in \mathcal{U}_{k,x}} I_{k,x,i}=\frac{7}{6}\|x\|^2, i\in \mathbf{Z}$$

and the optimal control is $\tilde{u}_n = F(r_n)\tilde{x}_n$, where $F(i)=\begin{cases}-\frac{27}{7}I_{l^2(\mathbf{Z})}, i\in \mathbf{Z}, i\neq 0\\ -\frac{3}{28}I_{l^2(\mathbf{Z})}, i=0\end{cases}$ for all $n\in \mathbf{N}$ .

## REFERENCES


1. W. P. Blair Jr, D. D.,Sworder, *Continuous time regulation of a class of econometric models*, IEEE Trans. Systems Man. Cyber., 5(1975), 341-346
2. O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, R.P. Marques, *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Probability and its Applications, Springer, New York, 2005.
3. H. Daduna, *Queueing Networks with Discrete Time Scale*, Lecture Notes in Computer Science,Vol. 2046, Springer, 2001.
4. J. B. Do Val, T.Basar, *Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem*, J. econom. Dynam. Control, 23(1999), 1099-1131.
5. R. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory,* Academic Press, New York şi London ,1972.
6. M. Mariton, Jump Linear Systems in Automatic Control, Marcel Dekker, New York, 1990.
7. V. M. Ungureanu, *Optimal control for linear discrete time systems with Markov perturbations in Hilbert spaces*, IMA J. Math. Control Inform. 26 (2009), no. 1,105-127.
8. V. M. Ungureanu, V. Dragan, T. Morozan, *Global solutions of a class of discrete-time backward nonlinear equations on ordered*

7. V. M. Ungureanu, *Optimal control for linear discrete time systems with Markov perturbations in Hilbert spaces*, IMA J. Math. Control Inform. 26 (2009), no. 1,105-127.
8. V. M. Ungureanu, V. Dragan, T. Morozan, *Global solutions of a class of discrete-time backward nonlinear equations on ordered Banach spaces with applications to Riccati equations of stochastic control,* Optimal Control Applications and Methods, DOI: 10.1002/oca.2015.
9. V. M. Ungureanu, V. Dragan, *Stability of discrete-time positive evolution operators on ordered Banach spaces and applications*, Journal of Difference Equations and Applications, DOI:10.1080/10236198.2012.704369.
10. V. M. Ungureanu, *Stability of discrete-time positive evolution operators on ordered Banach spaces and applications, to appear in* Optimization, DOI:10.1080/10236198.2012.704369

*Banach spaces with applications to Riccati equations of stochastic control,* Optimal Control Applications and Methods, DOI: 10.1002/oca.2015.
9. V. M. Ungureanu, V. Dragan, *Stability of discrete-time positive evolution operators on ordered Banach spaces and applications*, Journal of Difference Equations and Applications, DOI:10.1080/10236198.2012.704369.
10. V. M. Ungureanu, *Stability of discrete-time positive evolution operators on ordered Banach spaces and applications, to appear in* Optimization, DOI:10.1080/10236198.2012.704369